Demi-anneaux réticulés et idéaux minimaux

par

A. Almeida Costa et M.ª L. Noronha Galvão

1. Introduction

[redacted] cette Introduction, avant d'énoncer les résultats auxquels nous arriverons, [redacted] des indications générales sur les demi-anneaux, en particulier nous rap- [redacted] points qui seront utiles.

[redacted], $b, c, i, \dots, a', r, r', s, t, \dots, v, x, y, \dots \}$ un demi-anneau [3]. Alors, $\mathfrak{r}$ [redacted]nt des idéaux à droite; $\mathfrak{l}, \mathfrak{q}, \mathfrak{f}$ des idéaux à gauche; et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}$ des idéaux du demi-anneau. Ces symboles conserveront sa signification, même qu'ils soient affectés de signes ou de lettres. Les notations $(a)_d$, $(a)_e$, (a) sont employées pour désigner, respectivement, l'idéal à droite, l'idéal à gauche et l'idéal engendré par $\underline{a}$.

$\mathfrak{p}$ est dit premier, si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui équivaut [1], [9], à une des conditions suivantes: 1) $a\Gamma b\Gamma \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\Gamma a \Gamma b \subseteq \mathfrak{p}$ ou $a\Gamma b \subseteq \mathfrak{p}$ implique $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$; 2) $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{p}$; 3) $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{p}$; 4) $(a)(b) \subseteq \mathfrak{p}$ implique $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$; 5) $(a)_d(b)_d \subseteq \mathfrak{p}$ implique $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$; 6) [redacted] $(b)_e \subseteq \mathfrak{p}$ implique $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$; 7) $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$ implique $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{p}$.

[redacted] semi-premier, si $\mathfrak{a}^2 \subseteq \mathfrak{c}$ implique $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$, ce qui équivaut [1], [3] à [redacted]que des conditions obtenues de celles énoncées pour les idéaux premiers, [redacted]açant deux symboles différents ($\underline{a}$ et $\underline{b}$; $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$; $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$)

par un même symbole. Par exemple: $\mathfrak{c}$ est semi-premier, si et seulement si $\mathfrak{r}^2 \subseteq \mathfrak{c}$ implique $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{c}$. Les idéaux premiers sont semi-premiers.

L'idéal nucléaire $\mathfrak{J}$ (ou idéal de Suschkewitch) est l'intersection de tous les idéaux non vides. Si $0 \in \Gamma$, on a $\mathfrak{J} = (0)$, mais, si l'élément-zéro n'existe pas, on peut avoir $\mathfrak{J} = \phi$ ou $\mathfrak{J} \neq \phi$. Un demi-anneau est appelé premier (semi-premier), si son idé- [redacted] nucléaire est premier (semi-premier). Lorsque Γ est premier (semi-premier), $\Gamma a \subseteq \mathfrak{J}$, ou $a\Gamma \subseteq \mathfrak{J}$, implique $a \in \mathfrak{J}$. Un idéal $\mathfrak{a} \neq \phi$, en tant que demi-anneau, admet un idéal nucléaire $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{J}$, [3]. De plus, tout idéal d'un demi-anneau premier (semi-premier) est un demi-anneau premier (semi-premier) [1]. Par conséquent, si Γ est premier (semi-premier), la condition $\mathfrak{a}a \subseteq \mathfrak{J}$, ou $a\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}$, avec $a \in \mathfrak{a}$, implique $a \in \mathfrak{J}$.

Les résultats qu'on vient de rappeler sont les mêmes que dans la théorie des anneaux associatifs. On peut aussi transposer pour certains demi-anneaux la théorie des idéaux primaires de Noether-Krull [1] [6].

Si $\mathfrak{J} = \phi$, Γ est premier. C'est ce qui arrive, par exemple, pour le demi-anneau des nombres naturels $\mathfrak{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, dont voici, en passant, quelques propriétés particulières [12]: 1) tout idéal est engendré par un nombre fini d'éléments; 2.) toute chaîne ascendante d'idéaux est finie; 3.) les seuls idéaux premiers de $\mathfrak{N}$ sont $\mathfrak{N}$ lui-même, les idéaux engendrés par les nombres premiers, l'idéal vide et l'idéal engendré par $\underline{2}$ et $\underline{3}$; 4.) les idéaux semi-premiers sont non seulement les idéaux premiers, mais aussi [redacted]aux engendrés par les produits d'un nombre fini de nombres premiers [redacted] Pour le demi-anneau des nombres réels $\geqq 2$, on a de même $\mathfrak{J} = \phi$. [redacted]t d'un μ-demi-anneau premier, que nous avons d'ailleurs étudié dans le travail [5], où l'on trouve la définition et la caractérisation des μ-demi-anneaux.

Si $\mathcal{I}=\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est premier. C'est ce qui arrive, par exemple, si le demi-anneau est défini d'après les règles $x.y=x$, $x+y=y$. Un autre exemple est donné par les demi-anneaux à division, définis par la propriété que voici: les éléments différents de zéro constituent un groupe par rapport au produit. Les anneaux à division, avec leurs ensembles d'idéaux à droite, à gauche ou bilatères, sont des demi-anneaux à division. D'une façon générale, tout anneau contenant l'identité est un demi-anneau avec les mêmes ensembles des différents types d'idéaux.

La théorie des demi-groupes multiplicatifs appartient à la théorie des demi-anneaux, à condition que, en conservant le produit, on introduise la règle de somme $x+y=y$. Pourvu qu'il y ait plus d'un élément, ces demi-anneaux ne contiennent jamais l'élément-zéro, même que le demi-groupe en contienne. Les groupes multiplicatifs, en particulier, sont des demi-anneaux à division. Et on parle de demi-groupes premiers et semi-premiers.

Nous rappelons aussi que l'idéal nucléaire à droite $\mathcal{I}_d$ (à gauche $\mathcal{I}_e$) est l'intersection de tous les idéaux à droite non vides (à gauche non vides). Si $\underline{0}$ existe, ou si $\mathcal{I}=\phi$, les trois idéaux nucléaires sont égaux. Dans les autres cas, on peut avoir $\mathcal{I}\neq\phi$ avec $\mathcal{I}_d=\phi$ (avec $\mathcal{I}_e=\phi$); mais, si $\mathcal{I}_d\neq\phi$ (si $\mathcal{I}_e\neq\phi$), on a $\mathcal{I}=\mathcal{I}_d$ (on a $\mathcal{I}=\mathcal{I}_e$), [1] [3]. De même que $\mathcal{I}(\mathfrak{a})=\mathcal{I}$, on a aussi, pour tout $\mathfrak{a}\neq\phi$, $\mathcal{I}_d(\mathfrak{a})=\mathcal{I}_d$ et $\mathcal{I}_e(\mathfrak{a})=\mathcal{I}_e$. En effet, et par exemple: Soit $\mathcal{H}_\alpha$ un idéal à droite non vide de $\mathcal{T}$; alors $\mathcal{H}_\alpha$ [redacted] est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$, puisque $\phi\subset\mathcal{H}_\alpha\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{H}_\alpha\cap\mathfrak{a}$. On en tire $\bigcap(\mathcal{H}_\alpha\cap\mathfrak{a})=\mathfrak{a}\cap(\bigcap\mathcal{H}_\alpha)=\mathfrak{a}\cap\mathcal{I}_d=\mathcal{I}_d$, donc $\mathcal{I}_d(\mathfrak{a})\subseteq\mathcal{I}_d$. D'autre part, si $\underline{R_o}$ est un idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$, on a $R_o\mathfrak{a}\neq\phi$, $R_o\mathfrak{a}\subseteq R_o$. Ainsi, tout idéal à droite non vide de $\mathfrak{a}$ contient un idéal à droite non vide de $\mathcal{T}$, ce qui entraîne $\mathcal{I}_d(\mathfrak{a})\supseteq\mathcal{I}_d$. Par conséquent, $\mathcal{I}_d(\mathfrak{a})=\mathcal{I}_d$.

Nous attirons aussi l'attention sur le point suivant: Un idéal (ou un idéal à droite ou un idéal à gauche) est minimal lorsqu'il ne contient, en tant qu'idéaux propres (en tant qu'idéaux à droite ou à gauche propres), que les idéaux vide et l'idéal-zéro (ce dernier, si l'élément-zéro existe). À titre d'exemples: si $0\notin\mathcal{T}$ et $\mathcal{I}_d\neq\phi$, $\mathcal{I}_d$ est le seul idéal à droite minimal; et, si $0\notin\mathcal{T}$ et $\mathcal{I}\neq\phi$, $\mathcal{I}$ est le seul idéal minimal.

Un demi-anneau qui contient des idéaux à droite et à gauche minimaux s'appelle un dem-demi-anneau.

Une partie importante de ce travail est consacrée à l'étude des demi-anneaux réticulés, dont voici la définition: Un demi-anneau $\mathcal{L}$ qui soit un treillis muni de opérations $\vee$ et $\wedge$ et qui vérifie les relations $x+y=x\vee y$, $xy\leqq x\wedge y$ est un demi-anneau réticulé [1][2]. On trouve chez [1], pour ces demi-anneaux, non seulement la théorie de Noether-Krull des idéaux primaires, mais aussi celle des idéaux primaux de Fuchs et Curtis. Nos résultats, sauf une partie de ceux qui sont donnés au § 5, sont tout à fait différents. Justement, à cause de cette exception, nous ferons ci-dessous quelques remarques. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal réticulé, c'est-à-dire un idéal qui est de même un idéal du treillis $\mathcal{L}$. On définit comme d'habitude un quotient à droite par l'égalité $(\mathfrak{a}:b)_d=\{x\in\mathcal{L}\mid xb\in\mathfrak{a}\}$. Il s'agit d'un idéal réticulé. Lorsqu'on a $(\mathfrak{a}:b)_d\supset\mathfrak{a}$, l'élément $\underline{b}$ est en relation avec $\mathfrak{a}$, au contraire, si $(\mathfrak{a}:b)_d=\mathfrak{a}$, $\underline{b}$ n'est pas en relation avec $\mathfrak{a}$. L'ensemble des éléments en relation avec $\mathfrak{a}$ sera représenté par $\mathfrak{M}'$. On voit, par exemple, que $ab\in\mathfrak{M}'$ entraîne $a\in\mathfrak{M}'$ ou $b\in\mathfrak{M}'$ et que $b\in\mathfrak{M}'$ implique $x\in\mathfrak{M}'$, à chaque fois que $x\leqq b$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal dont tous les éléments sont en relation avec l'idéal réticulé $\mathfrak{a}$, on dit $\mathfrak{b}$ en relation avec $\mathfrak{a}$. Alors, soit $\mathfrak{q}$ un idéal dans les conditions suivantes : 1_{oo}) il est en relation avec $\mathfrak{r}$; 2_{oo}) tout idéal $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{q}$ n'est pas en relation avec $\mathfrak{r}$. On appelle $\mathfrak{q}$ un idéal maximal appartenant à $\mathfrak{r}$. Il s'agit d'un idéal réticulé qui contient $\mathfrak{r}$, car $(\mathfrak{r}, \mathfrak{q})$ est un idéal en relation avec $\mathfrak{r}$. L'ensemble $\mathcal{M}$, complémentaire de $\mathcal{M}'$, est un système multiplicatif, donc un m-système [3]. Par conséquent, $\mathfrak{q}$ est un idéal premier, en tant qu'idéal maximal contenant $\mathfrak{r}$ et ne contenant pas un élément de $\mathcal{M}$. L'idéal adjoint $\mathfrak{W}$, de $\mathfrak{r}$, est composé des éléments c tels que, pour tout $b \in \mathcal{M}'$, on a aussi $c+b \in \mathcal{M}'$. Il s'agit d'un idéal réticulé contenu dans $\mathcal{M}'$. Puisque $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{M}'$, $(\mathfrak{W}, \mathfrak{q})$ est aussi en relation avec $\mathfrak{r}$ et on a, d'une façon plus précise, $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{q}$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{L}$ est un élément qui appartient à tous les idéaux maximaux appartenant à $\mathfrak{r}$, en prenant $b \in \mathcal{M}'$, les raisonnements du commencement du § 2 montrent que $(b) \subseteq \mathcal{M}'$ et il existe un idéal maximal $\mathfrak{q}'$ appartenant à $\mathfrak{r}$ et contenant (b), d'où l'on tire $v+b \in \mathfrak{q}'$, ainsi que $v \in \mathfrak{W}$. Donc: L'idéal adjoint de $\mathfrak{r}$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux appartenant à $\mathfrak{r}$. Il s'agit d'un idéal réticulé semi-premier. Lorsqu'on a $\mathfrak{W} = \mathcal{M}'$, l'idéal réticulé $\mathfrak{r}$ est dit primal. On peut donner les caractérisations suivantes des idéaux primaux : 1_{ooo}) pour que $\mathfrak{r}$ soit primal, il faut et il suffit qu'on ait $b_1+b_2 \in \mathcal{M}'$, à chaque fois que $b_1, b_2 \in \mathcal{M}'$; 2_{ooo}) pour que $\mathfrak{r}$ soit primal, il faut et il suffit que son idéal adjoint soit le seul idéal premier maximal appartenant à $\mathfrak{r}$.

Dans le § 2, après que nous avons montré que l'idéal nucléaire d'un demi-anneau réticulé ne peut être que (0) ou ϕ (th. 2), nous arrivons à reconnaître que les radicaux classique, de Levitzki, de Köthe, le radical supérieur et le radical inférieur sont égaux. Ils constituent un idéal réticulé, composé de tous les nilélements (th. 4 et 5). Quant au radical de Jacobson, nous démontrons que tout demi-anneau réticulé est un anneau-radical (th. 6).

Dans le § 3, l'étude des idéaux à droite (à gauche) minimaux d'un demi-anneau réticulé et bien aussi celle des sous-demi-anneaux à division fait arriver aux théorèmes 7 et 8, qui montrent, sauf un cas exceptionel, qu'ils se composent de deux éléments. Le théorème 9 profite de ce résultat.

Dans le § 4, en supposant qu'il s'agit d'un demi-anneau réticulé premier, on établit que tout idéal à droite minimal $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ vérifie les conditions suivantes (th. 10): a est un atome et $\mathfrak{r}$ est un sous-demi-anneau à division égal à l'idéal nucléaire. Le corollaire 2 rappelle le deuxième théorème de Wedderburn-Artin de la théorie des anneaux. Le théorème 11 et son corollaire 3 font intervenir le socle (ou somme d'idéaux à droite minimaux). Ce corollaire rappelle le premier théorème de Wedderburn-Artin.

Dans le § 5, les théorèmes 12 et 13, le corollaire 4 et le théorème 14 constituent une théorie de Fuchs des idéaux primaux d'un demi-anneau réticulé. Le théorème 15 attire l'attention sur la condition 2 de la théorie de Goldie des anneaux et le théorème 16 est le seul théorème qu'on démontre pour les demi-anneaux réticulés, à partir de telle condition.

Le travail contient un ensemble de dix propositions très importantes, ainsi que trois conséquences de ces propositions. Sauf la première, qui donne des conditions pour qu'un demi-anneau à division soit un anneau à division, les autres, bien qu'on puisse les trouver dans les travaux de Bourne et de Bourne-Zassenhaus [8][10], on les présente sous une forme plus complète, en profitant du concept de morphisme à gauche d'un idéal à droite d'un demi-anneau quelconque.

2. Idéaux nucléaires. Radicaux

Dans tout ce qui va suivre, nous représenterons un demi-anneau réticulé par $\mathcal{T}$, s'il ne contient pas l'élément-zéro ; par $\mathcal{T}_0$, si $0 \in \mathcal{T}_0$; et par $\mathcal{L}$, si l'existence ou non-existence de $\underline{0}$ n'intervient pas dans les raisonnements.

Puisqu'un idéal réticulé est aussi un idéal du treillis $\mathcal{L}$, on construit l'idéal réticulé $\mathfrak{a}$ engendré par une famille d'éléments, en construisant l'idéal $\mathfrak{a}'$ engendré par la famille en question et en prenant l'ensemble des éléments $a \leqq a'$, où $a' \in \mathfrak{a}'$. Par exemple, $(x) = x \vee x\mathcal{L} \vee \mathcal{L}x \vee \mathcal{L}x\mathcal{L}$ est l'idéal de $\mathcal{L}$ engendré par $\underline{x}$, tandis que l'idéal réticulé engendré par $\underline{x}$ est l'idéal principal correspondant du treillis.

Prenons $\mathcal{L}$. Puisque $(a+b)x = (a \vee b)x = ax + bx = ax \vee bx$, on voit que $a \leqq b$ entraîne $ax \leqq bx$. De même, $a \leqq b$ donne $xa \leqq xb$. Donc, $x \leqq a$ et $y \leqq b$ impliquent $xy \leqq ab$. Si, ensuite, $\mathfrak{a}$ est un idéal réticulé, supposons $ab \in \mathfrak{a}$. Tout élément $x \in (a)(b)$ vérifie la condition $x \leqq ab$, par conséquent $(a)(b) \subseteq \mathfrak{a}$. De là ce

*

Théorème 1 :- Soit $\mathfrak{a}$ un idéal réticulé et supposons $ab \in \mathfrak{a}$. Le produit $(a)(b)$ ainsi que le produit des idéaux réticulés engendrés par $\underline{a}$ et $\underline{b}$, respectivement, sont contenus dans $\mathfrak{a}$.

*

Corollaire 1 :- Un idéal réticulé est premier (semi-premier), si et seulement s'il est complètement premier (semi-premier). On dit $\mathfrak{p}$ complètement premier, si $ab \in \mathfrak{p}$ entraîne $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$. Alors, dans un demi-anneau quelconque, tout idéal complètement premier est premier. Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal réticulé et premier. En supposant $ab \in \mathfrak{p}$, le théorème mène à $(a)(b) \subseteq \mathfrak{p}$, par conséquent $(a) \subseteq \mathfrak{p}$ ou $(b) \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui entraîne $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$. Quant aux idéaux complètement semi-premiers $\mathcal{C}$, nous nous bornons à rappeler la définition : $a^2 \in \mathcal{C}$ implique $a \in \mathcal{C}$.

*

L'idéal nucléaire $\mathcal{I}$, de $\mathcal{L}$, s'il n'est pas vide est égal à (0), car, en prenant $i \in \mathcal{I}$ et $x \in \mathcal{L}$, l'idéal (x) vérifie la condition $(x) \supseteq \mathcal{I}$, d'où $i \in (x)$, $i \leqq x$, donc $i = 0$.

Par conséquent :

*

Théorème 2 :- Les trois idéaux nucléaires d'un demi-anneau réticulé sont égaux et leur valeur et ϕ ou (0).

*

Nous analyserons tout de suite quelques conséquences de ce résultat. Rappelons que $0 \in \mathcal{L}$ est dit un zéro trivial, si $a+b=0$ implique $a=b=0$ et $ab=0$ implique $a=0$ ou $b=0$. Alors :

*

Théorème 3 :- Un demi-anneau réticulé n'est pas premier, si et seulement s'il contient un zéro non trivial. Si $\mathcal{L}$ n'est pas premier, on a $\mathcal{I}=(0)$ et il existe $a \neq 0 \neq b$ tels que $ab=0$, de sorte que $\underline{0}$ n'est pas trivial. Réciproquement, si $0 \in \mathcal{L}$ n'est pas trivial, puisque $a+b=0$ implique $a=b=0$, il existe $a \neq 0 \neq b$ tels que $ab=0$ et $\mathcal{L}$ n'est pas premier.

*

Sans doute que $\mathcal{I} = \phi$ entraîne que les différents radicaux de $\mathcal{T}$ composés de nil-éléments soient vides. Mais, si $\mathcal{I}=(0)$, prenons un nilélément $\underline{a}$. Puisque la somme de deux niléléments est un nilélément, on voit tout de suite que l'ensemble des niléléments constitue un nilidéal réticulé ; de plus, tout nilélément engendre un nilidéal. Donc :

*

Théorème 4 :- Le radical supérieur d'un demi-anneau réticulé est égal à son radical classique, à son radical de Levitzki et à son radical de Köthe. Il s'agit de l'ensemble des niléléments de $\mathcal{L}$, qui forme un nilidéal réticulé.

*

En ce qui concerne le radical inférieur $B(\mathfrak{a})$ d'un idéal réticulé $\mathfrak{a}$, nous savons que $B(\mathfrak{a})$ est l'idéal semi-premier minimal unique appartenant à $\mathfrak{a}$ et que $\mathcal{L} - B(\mathfrak{a})$ est le seul $\underline{p}$-système maximal [1][2] disjoint de $\mathfrak{a}$, aussi défini comme ensemble réunion de tous les $\underline{p}$-systèmes disjoints de $\mathfrak{a}$. Alors, si $v \in B(\mathfrak{a})$, puisque $P = \{v, v^2, v^3, \dots\}$ est un $\underline{p}$-système, on voit que $P \nsubseteq \mathcal{L} - B(\mathfrak{a})$, par conséquent

$\underline{\mathfrak{l}}$ n'est pas disjoint de $\mathfrak{r}$ et il existe $v^\sigma \in \mathfrak{r}$. Réciproquement, si $v^\sigma \in \mathfrak{r}$, on a $v^\sigma \in B(\mathfrak{r})$, donc $v \in B(\mathfrak{r})$. De plus, prenons $y \geqq v$. Il en résulte $y^\sigma \geqq v^\sigma$, $y^\sigma \in \mathfrak{r}$, ainsi que $y \in B(\mathfrak{r})$. Ainsi:

*

Théorème 5 :- Si $\mathfrak{r}$ est un idéal réticulé, pour que $\underline{v}$ appartienne à son radical inférieur, il faut et il suffit qu'on ait $v^\sigma \in \mathfrak{r}$. En particulier, $v \in B((0))$ signifie $v^\sigma = 0$, donc sont égaux les radicaux supérieur et inférieur de $\mathfrak{b}$. [Note: $\mathfrak{I} = \phi$ entraîne, comme nous l'avons dit ci-dessus, que le radical inférieur soit vide aussi].

*

Toujours que la somme soit commutative et que les trois idéaux nucléaires soient égaux, on peut faire, en utilisant la méthode de Bourne [4], la théorie du J-radical d'un demi-anneau Γ. Alors, un élément $\underline{r}$ est dit semi-régulier à droite, si les conditions suivantes sont réalisées : 1) dans le cas où $\mathfrak{I}_d$ est vide, il existe r', r'' tels que $r + r' + rr' = r'' + rr''$; 2) dans le cas où $\mathfrak{I}_d \neq \phi$, il existe r', r'', ainsi que $i', i'' \in \mathfrak{I}_d$, tels que $r + r' + rr' + i' = r'' + rr'' + i''$. De plus, un idéal à droite $\mathfrak{s}$ est dit semi-régulier, si, en supposant $\mathfrak{I}_d = \phi$, il est composé d'éléments semi-réguliers à droite, et, en prenant $r_1, r_2 \in \mathfrak{s}$, il existe $r_1', r_2' \in \mathfrak{s}$ tels que $r_1 + r_1' + r_1 r_1' + r_2 r_2' = r_2 + r_2' + r_2 r_1' + r_1 r_2'$; mais, si $\mathfrak{I}_d \neq \phi$, il ne faut pas faire intervenir l'hypothèse que $\mathfrak{s}$ soit composé d'éléments semi-réguliers à droite, car cette propriété est déjà une conséquence de l'autre. Les définitions faisant intervenir le mot "gauche" au lieu du mot "droite" sont analogues.

Or, pour les demi-anneaux réticulés, non seulement la somme est commutative et les trois idéaux nucléaires sont égaux, mais, indépendamment de la valeur de $\mathfrak{I}$, tout élément est semi-régulier à droite (à gauche), puisque, en faisant $a' = a$, $a'' = a$, l'égalité $a \vee a' \vee aa' = a'' \vee aa''$ est valable. D'autre part, si l'on considère, par exemple, un idéal à droite $\mathfrak{s}$, on voit qu'il est semi-régulier à droite, car, en prenant $r_1, r_2 \in \mathfrak{s}$, il suffit de faire $r_1' = r_2$, $r_2' = r_1$ pour obtenir $r_1 \vee r_1' \vee r_1 r_1' \vee r_2 r_2' = r_2 \vee r_2' \vee r_2 r_1' \vee r_1 r_2'$. Donc:

*

Théorème 6 :- Tout demi-anneau réticulé est égal à son J-radical.

*

Exemple :- Parmi les demi-anneaux réticulés, le demi-anneau Γ^* des idéaux d'un demi-anneau Γ, à l'exclusion de l'idéal vide, offre un intérêt tout particulier. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de Γ, nous représentons par $\mathfrak{b}_o^*$ l'ensemble des idéaux de Γ contenus dans $\mathfrak{b}$, à l'exclusion de l'idéal vide (il s'agit de l'idéal principal du treillis Γ^* engendré par $\mathfrak{b}$). En considérant une interection $\bigcap \mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{i}$, $(\alpha \in A)$, d'idéaux de Γ, on voit que $\bigcap (\mathfrak{b}_\alpha)_o^* = \mathfrak{i}_o^*$ et que, réciproquement, cette dernière égalité entraîne la précédente. En effet : en partant de la première égalité, si $\mathfrak{i}' \leq \mathfrak{i}$ est un idéal de Γ, on a $\mathfrak{i}' \leq \mathfrak{b}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$, donc $\mathfrak{i}' \in (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$, ce qui entraîne $\mathfrak{i}_o^* \leq \bigcap (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$; et, si $\mathfrak{b} \in \bigcap (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$, on a $\mathfrak{b} \in (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$, $\forall \alpha \in A$, donc $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_\alpha$, ce qui entraîne $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{i}$ et $\mathfrak{b} \in \mathfrak{i}_o^*$. La réciproque est aussi simple à montrer : d'abord, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{i}_o^*$, donc $\mathfrak{i} \in (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$, $\forall \alpha \in A$, et $\mathfrak{i} \leq \mathfrak{b}_\alpha$ ainsi que $\mathfrak{i} \leq \bigcap \mathfrak{b}_\alpha$; inversement, si $x \in \bigcap \mathfrak{b}_\alpha$, de $x \in \mathfrak{b}_\alpha$, $\forall \alpha \in A$, on tire $(x) \in (\mathfrak{b}_\alpha)_o^*$, $(x) \in \mathfrak{i}_o^*$, $(x) \leq \mathfrak{i}$. Ceci fait, étudions l'idéal nucléaire $\mathfrak{I}(\Gamma^*)$, de Γ^*. L'hypothèse $\mathfrak{I} = \phi$ entraîne $\mathfrak{I}(\Gamma^*) = \phi$, car, en prenant $\mathfrak{I} = \bigcap \mathfrak{b}_\beta = \phi$, $(\beta \in B)$, il suffit de considérer $\bigcap (\mathfrak{b}_\beta)_o^*$ pour obtenir, compte tenu que l'idéal vide n'appartient pas à Γ^*, une intersection vide. Mais l'hypothèse $\mathfrak{I} \neq \phi$ entraîne $\mathfrak{I}(\Gamma^*) = \{\mathfrak{I}\}$, parce que $\mathfrak{I}$ est l'élément-zéro de Γ^*. Les nilèléments $\mathfrak{b} \in \Gamma^*$ sont ceux pour lesquels $\mathfrak{b}^\sigma = \mathfrak{I}$.

Au sujet de l'importance des demi-anneaux réticulés Γ^*, nous nous bornons à rappeler que, d'après [1] [2], on peut donner une caractérisation des μ-demi-anneaux [5], en utilisant les propriétés de Γ^* (voir aussi [6]).

* * *

3. Idéaux à droite (à gauche) minimaux et sous-demi-anneaux à division

Soit $\mathfrak{r}_0$ un idéal à droite composé d'un seul élément $\underline{a}$, qui ne soit pas l'élément-zéro de $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}$ ne peut pas contenir cet élément-zéro et la définition d'idéal à droite minimal donnée dans l'Introduction sous-entend $\mathfrak{r}_0=\{a\}$ comme idéal à droite minimal.

* Exemple:- Si $\mathcal{T}$ est défini d'après les règles $x+y=y$, $x.y=x$, un élément quelconque constitue un idéal à droite minimal.

* Prenons ensuite un dem-demi-anneau où $\mathfrak{r}_0=\{e\}$ et $\mathfrak{l}_0=\{f\}$ soient, respectivement, un idéal à droite et un idéal à gauche minimal. Le produit $\mathfrak{r}_0\mathfrak{l}_0=\{ef\}$, puisque $eb=e$, $bf=f$, $\forall b\in\mathcal{T}$, vérifie les relations $\mathfrak{r}_0\mathfrak{l}_0=\{e\}=\{f\}$. De plus, on a $e+e=e$.

* Exemple:- $\mathcal{T}$ est le demi-anneau dont voici les tables de Cayley :

+	e	a	b
e	e	a	b
a	e	a	b
b	e	a	b

,

.	e	a	b
e	e	e	e
a	e	a	b
b	e	b	a

.

On a justement $\mathfrak{r}_0=\mathfrak{l}_0=\{e\}$.

* En ce qui concerne les sous-demi-anneaux à division, remarquons que, même que $\mathcal{T}$ contienne l'élément-zéro, il peut exister des sous-demi-anneaux ne contenant pas cet élément, bien qu'ils contiennent son élément-zéro. Par exemple, soit $e\in\mathcal{T}$ tel que $e+e=e$, $ee=e$. Le sous-demi-anneau $\{e\}$ est composé de son seul élément-zéro. Si $e\neq 0\in\mathcal{T}$, nous considérerons $\{e\}$ comme sous-demi-anneau à division. Le produit $\mathfrak{r}_0\mathfrak{l}_0$ qu'on a trouvé ci-dessus est un idéal et aussi un sous-demi-anneau à division.

* Cela posé, étudions un idéal à droite minimal de $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{I}=\phi$ et $a\in\mathfrak{r}$, on a

$\mathfrak{r}=a\vee a\mathfrak{b}$. Un élément $\underline{at}$, $(t\in\mathfrak{b})$, engendre aussi $\mathfrak{r}$, de sorte que $a\geqq at\geqq a$, ce qui donne $a=at\geqq t$. Alors, $\underline{a}$ serait l'élément-zéro de $\mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{r}$ n'existe pas. Si $\mathfrak{I}=(0)$, en écrivant $\mathfrak{r}=a\vee a\mathfrak{b}$, ou bien $a\mathfrak{b}=(0)$ et $\mathfrak{r}=\{0,a\}$, ou $a\mathfrak{b}\neq(0)$ et tout $as\neq 0$ engendre $\mathfrak{r}$. On en conclut $as=a$ et $\mathfrak{r}=\{0,a\}$, comme précédemment. D'ailleurs, on peut ajouter que l'hypothèse $at=a$, puisque $a=at\geqq a\wedge t$ implique $a\geqq t$. Par conséquent, $at=0$, si $t\not\geqq a$. Et on peut faire des raisonnements analogues pour les idéaux à gauche ou bilatères minimaux, ce qui permet d'énoncer ce

* Théorème 7:- Un demi-anneau réticulé pour lequel $\mathfrak{I}=\phi$ ne contient pas des idéaux à droite (à gauche, bilatères) minimaux. Si $\mathfrak{I}=(0)$, les idéaux à droite (à gauche, bilatères) minimaux, lorsqu'ils existent, sont de la forme $\{0,a\}$, et on a $at=0$, sauf si $t\geqq a$.

* Exemple:- Soit $\mathfrak{r}$ un idéal minimal d'un anneau semi-simple d'Artin-Noether. Alors $\{(0),\mathfrak{r}\}$ est un idéal à droite, à gauche et bilatère minimal du demi-anneau réticulé des idéaux de l'anneau. Et, si $\mathfrak{r}\nsubseteq\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal de l'anneau on a bien $\mathfrak{r}\mathfrak{b}=(0)$.

* En ce qui concerne un sous-demi-anneau à division $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{b}$, admettons qu'il puisse contenir plus d'un élément. Soit $\underline{u}$ son identité. En prenant $d\in\mathfrak{D}$, si $d_0\in\mathfrak{D}$ est tel que $d_0d=dd_0=u$, on a, d'une part, $d=du\geqq d\wedge u\geqq u$; d'autre part, $u=dd_0\geqq d$. Par conséquent, $d=u$. Ainsi:

* Théorème 8:- Les sous-demi-anneaux à division d'un demi-anneau réticulé sont de la forme $\{u\}$ ou de la forme $\{u_0,u\}$. Dans le premier cas, on suppose $u\neq 0\in\mathfrak{b}$, si $\underline{0}$ existe, et, dans le deuxième, on a $u_0+u_0=u_0$, $u_0+u=u+u_0=u$, $u+u=u$, $u_0u_0=u_0u=uu_0=u_0$, $uu=u$.

* Nous voyons que, bien que $\mathfrak{b}$ soit à somme commutative, les sous-demi-anneaux à division contenus dans $\mathfrak{b}$ ne sont jamais des anneaux à division. À ce sujet, nous donnons une proposition générale intéressante. Il est bien connu qu'un demi-anneau

peut être plongé dans un anneau, si et seulement si la somme est commutative et vérifie la loi de la coupe [7]. S'il s'agit d'un demi-anneau à division, nous avons cette

*

Proposition 1:- Un demi-anneau à division $\mathfrak{D}$ vérifiant la loi de la coupe pour la somme est à somme commutative. Si $\mathfrak{D}$ contient l'élément-zéro, pour que ce zéro soit non trivial, il faut et il suffit que le demi-anneau soit un anneau à division. Sous l'hypothèse $0 \in \mathfrak{D}$, l'existence de $a \neq 0$ tel que $a + a_0 = 0$, pour un certain $a_0 \in \mathfrak{D}$, implique que $\mathfrak{D}$ soit de même un anneau à division. Prenons $x, y \in \mathfrak{D}$ et écrivons $(u+u)(x+y) = u(x+y) + u(x+y) = (u+u)x + (u+u)y$, ce qui donne $x+y+x+y = x+x+y+y$. Si la loi de la coupe est vérifiée, on obtient $y+x = x+y$. Quant à la deuxième assertion, sans doute que, en supposant $\mathfrak{D}$ un anneau à division, l'élément-zéro est non trivial. Réciproquement, si $0 \in \mathfrak{D}$ est non trivial, puisque $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$, il existe $b_0 \neq 0$ et $b_0' \neq 0$ tels que $b_0 + b_0' = 0$. L'équation $b_0 y = d$, $(d \in \mathfrak{D})$, est soluble, par hypothèse. Si $\underline{y}$ est la solution, on voit que $b_0 y + b_0' y = d + b_0' y = 0$. Tout élément $\underline{d}$ admet un inverse par rapport à la somme, donc $\mathfrak{D}$, par rapport à cette opération, est un groupe. Alors, la somme est commutative et $\mathfrak{D}$ est un anneau à division. La dernière assertion de l'énoncé est maintenant immédiate.

*

Revenons à la question des idéaux à droite et à gauche minimaux. Dans le cas des dem-demi-anneaux, on énonce ce

*

Théorème 9:- Si $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ et $\mathfrak{l} = \{0, b\}$ sont, respectivement, un idéal à droite minimal et un idéal à gauche minimal d'un demi-anneau réticulé $\mathfrak{J}_0$, l'hypothèse $a \neq b$ entraîne $ab = 0$. Si $ab \neq 0$, on a $a = b$ et $\mathfrak{r} = \mathfrak{l} = \mathfrak{a}$ est un idéal minimal tel que $\mathfrak{a}^2 \neq (0)$. De plus, $\mathfrak{a}$ est un sous-demi-anneau à division. D'abord,

si $a \neq b$, on ne peut pas avoir $ab = a$, car cette relation entraînerait $b = a$. Par conséquent, $ab = 0$. L'hypothèse $ab \neq 0$ implique $a = b$, et $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ est un idéal minimal tel que $\mathfrak{a}^2 \neq (0)$. D'une façon précise, on a $a^2 = a$ et $\mathfrak{a}$ est un sous-demi-anneau à division.

*

Exemple:- En supposant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux minimaux d'un anneau semi-simple d'Artin-Noether, $\{(0), \mathfrak{a}\}$ et $\{(0), \mathfrak{b}\}$ sont des sous-demi-anneaux à division du demi-anneau réticulé des idéaux de l'anneau. Il s'agit aussi d'idéaux minimaux, et, si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est (0). Le demi-anneau $\mathfrak{J}_0$ de cet exemple contient d'autres sous-demi-anneaux à division, par exemple $\{\mathfrak{a}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\}$. $\mathfrak{J}_0$ est d'ailleurs une réunion de sous-demi-anneaux à division.

*

On rattache le problème d'existence de certains sous-demi-anneaux à division, dans un demi-anneau quelconque $\mathfrak{T}$, au problème des idéaux à droite et à gauche minimaux, au moyen de la proposition ci-dessous [8]:

*

Proposition 2:- Dans un demi-anneau $\mathfrak{T}$, si l'on suppose $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ le produit d'un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}$ par un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$, alors, pourvu que $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq (0) \neq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$, le produit $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ est un sous-demi-anneau à division et on a $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$. Nous ferons la démonstration en admettant $0 \in \mathfrak{T}$. Soit $0 \neq a \in \mathfrak{r}\mathfrak{l}$. On a $a\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$, car $a\mathfrak{r} = (0)$ impliquerait $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = (0)$. De même, $\mathfrak{l}a = \mathfrak{l}$. Dans ces conditions, si $h, k \in \mathfrak{r}\mathfrak{l}$, l'hypothèse $h \neq 0 \neq k$ entraîne $hk \neq 0$. Nous avons $a\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\mathfrak{l}a$ et $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ est bien un sous-demi-anneau à division. Si $\underline{e}$ est son identité, on voit que $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = e\mathfrak{T}e = e\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}e = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{l}$, ainsi que $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}e = e\mathfrak{l}$; de plus, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{l}\mathfrak{r}) = \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}\mathfrak{r})\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$.

*

Conséquence 1:- Dans un demi-anneau $\mathfrak{T}$, si l'on suppose $0 \notin \mathfrak{T}$, $\mathfrak{I}_d(\mathfrak{T}) \neq \phi$

$[\mathcal{D}_e(\mathcal{T}) \neq \phi]$, tout idéal à gauche (à droite) minimal est un sous-demi-anneau à division contenu dans $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Les hypothèses $0 \notin \mathcal{T}$, $\mathcal{D}_d(\mathcal{T}) \neq \phi \neq \mathcal{D}_e(\mathcal{T})$ entraînent que $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ soit un sous-demi-anneau à division.

* **Conséquence 2**:- Si $0 \in \mathcal{T}$ et $\mathfrak{v}$ est un idéal minimal, aussi minimal en tant qu'idéal à droite (à gauche), tout idéal à gauche minimal Π (à droite minimal $\mathfrak{r}$) tel que $\mathfrak{v}\Pi \neq (0) \neq \Pi\mathfrak{v}$ [tel que $\mathfrak{v}\mathfrak{r} \neq (0) \neq \mathfrak{r}\mathfrak{v}$] est un sous-demi-anneau à division contenu dans $\mathfrak{v}$. L'hypothèse $\mathfrak{v}^2 \neq (0)$, si $\mathfrak{v}$ est minimal en tant qu'idéal à droite et à gauche, entraîne que $\mathfrak{v}$ soit un sous-demi-anneau à division.

* Remarques: I) Le théorème 9 donne justement une réalisation de cette dernière assertion. II) Prenons $\mathcal{T}$ défini par $x+y=y$, $x.y=x$. On a $\mathcal{D}_d=\phi$, $\mathcal{D}_e=\mathcal{T}$ et un élément quelconque $\underline{v}$ engendre un idéal à droite minimal. Alors $(v)_d\mathcal{T}=(v)_d=\{v\}$ est en effet un sous-demi-anneau à division et $\mathcal{T}$ est une réunion de sous-demi-anneaux à division. III) Un sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{T}$ prend le nom de quasi-idéal, si, en supposant $a,b \in A$, on a $a+b \in A$, $A\mathcal{T} \cap \mathcal{T}A \subseteq A$, [11]. On en trouve un exemple dans l'intersection d'un idéal à gauche et d'un idéal à droite. Par conséquent, le sous-demi-anneau à division $\mathfrak{r}\Pi = \mathfrak{r} \cap \Pi$ de la proposition 2 est un quasi-idéal. Il s'agit d'ailleurs d'un quasi-idéal minimal, car, en prenant un quasi-idéal $Q \neq (0)$ tel que $Q \subset \mathfrak{r}\Pi$, compte tenu de $\Pi\mathfrak{r} \neq (0)$, on obtiendrait $\mathcal{T}Q=\Pi$, $Q\mathcal{T}=\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{r}\cap\Pi = Q\mathcal{T} \cap \mathcal{T}Q \subseteq Q$, ce qui est faux.

* Soit $\mathfrak{r}$ un idéal à droite d'un demi-anneau quelconque $\mathcal{T}$. Un morphisme à gauche $\mathfrak{r} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{r}$ est défini d'après les règles que voici [10]: $r_1 \to \sigma r_1$, $r_1' \to \sigma r_1'$, $r_1+r_1' \to \sigma(r_1+r_1') = \sigma r_1 + \sigma r_1'$, $rs \to \sigma(rs) = \sigma r . s$, $(r_1, r_1' \in \mathfrak{r};\ s \in \mathcal{T})$. Et un morphisme à droite est défini d'une façon analogue.

* **Exemple**:- L'idéal à droite minimal $\mathfrak{r}=\{0,a\}$, avec $a^2=a$, d'un demi-anneau $\mathcal{T}_0$ admet les seuls morphismes à gauche

$$\sigma: \begin{cases} 0 \to 0 \\ a \to 0\,; \end{cases} \qquad \tau: \begin{cases} 0 \to 0 \\ a \to a\,. \end{cases}$$

On les obtient en multipliant $\mathfrak{r}$ à gauche respectivement par $\underline{0}$ et $\underline{a}$, d'ailleurs les seuls éléments de $a\mathcal{T}_0 a$.

* D'une façon générale, soit $\mathfrak{r}$ un idéal à droite minimal d'un demi-anneau $\mathcal{T}$ contenant un idempotent $e \neq 0$. On a $\mathfrak{r}=e\mathcal{T}$, donc $er=r$, $\forall r \in \mathfrak{r}$, de sorte que $\sigma r = \sigma(er) = \sigma e . r = r_0 r$, en faisant $\sigma e = r_0 \in \mathfrak{r}$. D'autre part $\sigma(ee) = \sigma e . e = r_0 e = r_0$, ce qui implique $r_0 \in e\mathcal{T}e$. Les morphismes $\mathfrak{r} \to \mathfrak{r}$ sont obtenus par multiplication à gauche de $\mathfrak{r}$ par des éléments de $e\mathcal{T}e$. Et, réciproquement, toute multiplication de cette sorte définit un morphisme à gauche de $\mathfrak{r}$. Si $0 \neq r_0 \in e\mathcal{T}e$, on ne peut pas avoir $r_0\mathfrak{r} = (0)$, car $r_0 e = r_0$. Par conséquent, $r_0\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$, et, si $t_0 \in \mathfrak{r}$ est tel que $r_0 t_0 = e$, on a de même $r_0(t_0 e) = e$, avec $t_0 e \in e\mathcal{T}e$. Le produit de deux éléments non nuls de $e\mathcal{T}e$ est différent de zéro, et on en conclut que $e\mathcal{T}e$ est un demi-anneau à division. D'ailleurs, on peut faire les remarques suivantes: 1) un élément $r \in \mathfrak{r}$ définit aussi (par multiplication à gauche) un morphisme à gauche $\mathfrak{r} \to \mathfrak{r}$, mais le même morphisme est également défini par $re \in e\mathcal{T}e$; 2) à des éléments différents de $e\mathcal{T}e$ correspondent des morphismes à gauche différents; 3) les morphismes $\underline{\sigma}$ sont en réalité des isomorphismes à gauche, puisqu'une égalité $r_0 r_1 = r_0 r_1'$ entraînerait $t_0 r_0 r_1 = t_0 r_0 r_1'$, c'est-à-dire $r_1 = r_1'$; 4) la correspondance $r \to re$ est un morphisme de demi-anneaux. On énonce cette

* **Proposition 3**:- En prenant un demi-anneau quelconque $\mathcal{T}$, les endomorphismes à gauche d'un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}$ contenant un idempotent $e \neq 0$ sont des iso-

morphismes à gauche et constituent un demi-anneau à division isomorphe à $e\mathcal{D}e$.

* * *

4. Demi-anneaux premiers et semi-premiers

D'après ce que nous avons dit dans l'Introduction, $\mathcal{D}$ est toujours un demi-anneau premier, ce qui n'arrive pas pour $\mathcal{D}_0$. Nous allons imposer cette condition à $\mathcal{D}_0$ et démontrer le théorème suivant:

*

Théorème 10:- Si $\mathcal{D}_0$ est premier, l'existence d'un idéal à droite minimal $\mathfrak{r} = \{0, a\}$ implique: 1) l'élément-zéro est trivial; 2) $\mathfrak{r}$ est un sous-demi-anneau à division; 3) l'élément $\underline{a}$ est un atome; 4) en supposant $t \neq 0$, les relations $at = a = ta$ sont valables et $\mathfrak{r} = \mathcal{D}$ est un idéal. 1) est évident, d'après le théorème 3. 2) est une conséquence du corollaire 1 : on ne peut pas avoir $a^2 = 0$. Quant à 3), prenons $t \in \mathcal{D}_0$. Si $at = a$, on sait que $a \equiv t$, et réciproquement. Dans les autres cas, $at = 0$, donc $t = 0$. Par conséquent, $t \neq a$ implique $t = 0$ ou $t > a$, et $\underline{a}$ est un atome. Enfin, $a = aa \equiv ta \equiv$ $\equiv tra \equiv a$ donne $ta = a$, sauf si $t = 0$. $\mathfrak{r}$ est bien un idéal minimal, donc unique et égal à $\mathcal{D}$.

*

Corollaire 2:- Un demi-anneau réticulé semi-premier simple avec élément-zéro et contenant un idéal à droite minimal est un demi-anneau à division de la forme $\{0, a\}$.

*

Si $\mathcal{D}_0$, supposé semi-premier, n'est plus simple mais contient des idéaux à droite minimaux, par exemple $\mathfrak{r} = \{0, a\}$, l'idéal à droite $t\mathfrak{r} = \{0, ta\}$, si $ta \neq 0$, est aussi minimal et isomorphe à gauche à $\mathfrak{r}$. Réciproquement, si $\{0, a\}$ et $\{0, b\}$ sont isomorphes à gauche, de $b \longrightarrow a$, $ba \longrightarrow aa = a$, on conclut $ba = b$, donc $\{0, b\} =$ $= b.\{0, a\}$. L'idéal $\mathcal{D}_0 a$, qui contient tous les idéaux à droite isomorphes à gauche à $\mathfrak{r}$, est égal à leur somme. Il s'agit d'ailleurs d'un idéal minimal, car $0 \neq b \in \mathcal{D}_0 a$, en posant $b = t_0 a$, mène à $ab = a$, puisque $ab = at_0 a = 0$ entraînerait $(t_0 a)^2 = b^2 = 0$. Ainsi bien $\underline{b}$ que $\underline{a}$ engendrent cet idéal minimal, par conséquent $a = b$. On énonce ce

*

Théorème 11:- Si $\mathcal{D}_0$ est semi-premier et contient un idéal à droite minimal $\{0, a\}$, la composante homogène correspondante du socle est $\{0, a\}$. Cette composante est un idéal minimal.

*

Corollaire 3:- Si le demi-anneau réticulé $\mathcal{D}_0$ est semi-premier et égal à son socle, il est une somme $\sum \{0, a_\alpha\}$, $(\alpha \in A)$. Chaque $\{0, a_\alpha\}$ est un idéal égal à une composante homogène du socle et aussi un sous-demi-anneau à division.

*

Les raisonnements qu'on vient de faire ne sont que des aspects particuliers d'une théorie plus générale, pour laquelle on trouve chez [8] [10] la principale contribution. D'ailleurs, il y a dans la théorie des demi-groupes des résultats analogues [13].

Prenons un demi-anneau $\mathcal{T}$ ne contenant pas l'élément-zéro. La simple existence d'un idéal à droite minimal contenant un idempotent mène à des assertions très précises, comme nous allons le voir. Soit $\{\mathfrak{r}_\alpha\}$, $(\alpha \in A)$, la famille des idéaux à droite minimaux contenus dans $\mathcal{T}$. Si $r^0_\alpha \in \mathfrak{r}_\alpha$, $r^0_{\alpha'} \in \mathfrak{r}_{\alpha'}$, $(\alpha' \in A)$, on a $r^0_\alpha \mathfrak{r}_{\alpha'} = \mathfrak{r}_\alpha$, $r^0_{\alpha'} \mathfrak{r}_\alpha = \mathfrak{r}_{\alpha'}$, de sorte que $r^0_\alpha r^0_{\alpha'} \mathfrak{r}_\alpha = \mathfrak{r}_\alpha$. Alors, en admettant que $\mathfrak{r}_\alpha$ contient un idempotent e_α, on voit que $\mathfrak{r}_\alpha \xrightarrow{r^0_{\alpha'} e_\alpha} \mathfrak{r}_{\alpha'} \xrightarrow{r^0_\alpha} \mathfrak{r}_\alpha$ sont des isomorphismes à gauche (définis par multiplication à gauche par les éléments placés au dessus des flèches). En effet, si l'on prend $r_\alpha, r'_\alpha \in \mathfrak{r}_\alpha$, une égalité $r^0_{\alpha'} e_\alpha r_\alpha = r^0_{\alpha'} e_\alpha r'_\alpha$

entraîne $r^0_\alpha r^0_{\alpha'} e_\alpha r_\alpha = r^0_\alpha r^0_{\alpha'} e_\alpha r'_\alpha$, et, puisque $r^0_\alpha r^0_{\alpha'} e_\alpha \in e_\alpha \Gamma e_\alpha$, en supposant $t^0_\alpha r^0_\alpha r^0_{\alpha'} e_\alpha = e_\alpha$, $(t^0_\alpha \in e_\alpha \Gamma e_\alpha)$, on en conclut $r_\alpha = r'_\alpha$. Compte tenu du premier isomorphisme, on constate que le deuxième morphisme est de même un isomorphisme à gauche. Donc:

*

Proposition 4:- Si $\{\varpi_\alpha\}$, $(\alpha \in A)$, est la famille des idéaux à droite minimaux d'un demi-anneau Γ ne contenant pas l'élément-zéro, l'hypothèse que l'un des ϖ_α contient un élément idempotent e suffit pour que tous les idéaux à droite minimaux soient isomorphes à gauche. Et aussi: Si Γ est un dem-demi-anneau, tout idéal à droite minimal (à gauche minimal) contient un sous-demi-anneau à division et tous les idéaux à droite minimaux (à gauche minimaux) sont isomorphes à gauche (à droite).

*

Ceci fait, étudions le socle à gauche du dem-demi-anneau Γ, c'est-à-dire la somme $\sum \pi_\beta$, $(\beta \in B)$, de tous les idéaux à gauche minimaux. Il peut se faire qu'on ait $\mathcal{I}_e \neq \phi$, et alors $\mathcal{I}_e = \mathcal{I}$ est le socle en question, ou bien qu'on ait $\mathcal{I}_e = \phi$. Dans ce dernier cas, si $a \in \Gamma$, $\pi_\beta a$ est un idéal à gauche minimal [8], donc le socle à gauche est un idéal, et il en est de même du socle à droite $\sum \varpi_\alpha$, $(\alpha \in A)$. D'autre part, tout idéal ω non vide contient n'importe quel idéal à droite (à gauche) minimal, ce qui montre que, dans tous les cas, $\sum \varpi_\alpha = \mathcal{I} = \sum \pi_\beta$. Les relations $\pi_\beta = \sum \varpi_\alpha \pi_\beta$, $(\alpha \in A)$, ainsi que $\varpi_\alpha = \sum \varpi_\alpha \pi_\beta$, $(\beta \in B)$, sont valables. De plus, en prenant deux idéaux à gauche minimaux différents π_β et $\pi_{\beta'}$, les produits $\varpi_\alpha \pi_\beta$ et $\varpi_\alpha \pi_{\beta'}$, puisque $\pi_\beta \cap \pi_{\beta'} = \phi$, sont deux sous-demi-anneaux à division disjoints contenus dans ϖ_α. Par conséquent:

*

Proposition 5:- Dans un dem-demi-anneau Γ ne contenant pas l'élément-zéro, tout idéal à droite (à gauche) minimal est une somme de sous-demi-anneau à division disjoints et il en est de même de l'idéal nucléaire.

*

Pour arriver à des résultats analogues à ceux qu'on vient de obtenir dans le cas où Γ contient l'élément-zéro, nous introduirons une forte restriction, en nous bornant aux demi-anneaux premiers. Prenons ϖ_α et $\varpi_{\alpha'}$, tous deux supposés minimaux. Les conditions $\varpi_\alpha \varpi_{\alpha'} \neq (0) \neq \varpi_{\alpha'} \varpi_\alpha$ sont réalisées, de sorte que, en supposant $e_\alpha \in \varpi_\alpha$, et, ensuite, $r^0_\alpha \in \varpi_\alpha$, $r^0_{\alpha'} \in \varpi_{\alpha'}$, tels que $r^0_\alpha \varpi_{\alpha'} \neq (0) \neq r^0_{\alpha'} \varpi_\alpha$, les raisonnements qui ont amené à la proposition 4 sont valables. S'il s'agit, en particulier, d'un dem-demi-anneau premier, en prenant ϖ et π supposés minimaux, la condition $\varpi\pi \neq (0)$ est satisfaite et la proposition 2 peut être démontrée sous la seule hypothèse $\pi\varpi \neq (0)$. Or πa, $\forall a \in \Gamma$, si $\pi a \neq (0)$, est un idéal à gauche minimal et le socle à gauche de Γ est un idéal. Mais, puisqu'on ne peut pas avoir $(\sum \pi_\beta)\varpi = (0)$, il existe en effet un idéal à gauche minimal π_β tel que $\pi_\beta \varpi_\alpha \neq (0)$, où ϖ_α est choisi arbitrairement. Ainsi:

*

Proposition 6:- Si $0 \in \Gamma$ et Γ est un demi-anneau premier contenant un idéal à droite minimal possédant un idempotent, tous les idéaux à droite minimaux sont isomorphes à gauche. Et aussi: Si Γ est [redacted] un dem-demi-anneau, tout idéal à droite minimal (à gauche minimal) contient un sous-demi-anneau à division. Enfin, les socles à droite et à gauche sont égaux et constituent le seul idéal minimal de Γ.

*

Cette proposition, compte tenu que tout demi-anneau semi-premier simple est premier, permet qu'on énonce cette autre

*

Proposition 7:- Si $0 \in \Gamma$ et Γ est un demi-anneau semi-premier simple contenant un idéal à droite minimal avec un élément idempotent, alors Γ est égal à la somme de ses idéaux à droite minimaux, tous eux isomorphes à gauche.

*

Remarque:- Ce résultat est valable, pourvu que $0 \in \Gamma$ et Γ soit un dem-demi-anneau simple. De plus, s'il existe l'élément-un, la somme en question est finie.

*

De la proposition précédente, on monte au cas d'un demi-anneau semi-premier $\mathcal{T}$ contenant $\underline{0}$ et qui n'est plus simple mais que nous supposerons contenir des idéaux à droite minimaux. En prenant un tel idéal $\mathfrak{r}$, $t\mathfrak{r}$ $\neq (0)$, est aussi un idéal à droite minimal et l'idéal $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ a les propriétés suivantes [8]: 1') il est un demi-anneau semi-premier; 2') il est un idéal minimal de $\mathcal{T}$; 3') les idéaux à droite minimaux de $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ sont les idéaux à droite minimaux de $\mathcal{T}$ qu'il contient (parmi lesquels on trouve $\mathfrak{r}$); 4') en tant que demi-anneau, $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ est simple. De plus, si l'on admet que $\mathfrak{r}$ contient un élément idempotent, la structure de $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ est donnée par la proposition précédente. On peut ajouter que $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ ou égal? contient une composante homogène du socle de $\mathcal{T}$, car, si $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{r}'$, où $\mathfrak{r}'$ est aussi minimal, est un isomorphisme à gauche, puisque $\mathfrak{r}^2 \neq (0)$, choisissons $r \in \mathfrak{r}$ tel que $(0) \neq r\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$. Alors, si $r \to r' \in \mathfrak{r}'$, de $r\mathfrak{r} \to r'\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$, on conclut $\mathfrak{r}' \subseteq \mathcal{T}\mathfrak{r}$. Donc:

*

<u>Proposition 8</u>:- <u>Si $0 \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est un demi-anneau semi-premier contenant un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}$ possédant un idempotent, $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ est un demi-anneau semi-premier simple dont la structure est donnée par la proposition 7. $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ est aussi un idéal minimal contenant une composante homogène du socle de $\mathcal{T}$.</u>

*

<u>Conséquence 3</u>:- <u>Si $0 \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est un demi-anneau semi-premier égal à la somme de ses idéaux à droite minimaux $\mathfrak{r}$, alors $\mathcal{T}$ est une somme de demi-anneaux semi-premiers simples $\mathcal{T}\mathfrak{r}$, qui sont aussi des idéaux simples de $\mathcal{T}$. Sous la condition que chacun de ces $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ contienne un idéal à droite minimal possédant un idempotent, la structure de chaque $\mathcal{T}\mathfrak{r}$ est donné par la proposition 7.</u>

*

<u>Remarque</u>:- Ce résultat est valable, pourvu que $0 \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ soit un demi-anneau égal à la somme de ses idéaux à droite minimaux pourvu que tout idéal minimal contienne un idéal à gauche minimal. De plus, s'il existe l'élément-un, la somme en question est finie.

* * *

5. <u>La condition de chaîne ascendante</u>

Prenons $\mathfrak{b}$. Un idéal réticulé $\mathfrak{b}$ prend le nom d'idéal quasi-irréductible, si $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, où $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ sont des idéaux réticulés, entraîne $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ ou $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2$.

*

<u>Lemme 1</u>:- <u>Tout idéal quasi-irréductible $\mathfrak{b}$ est primal</u>. Si $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ le lemme est vrai. Au contraire, prenons $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}'$, où $\mathfrak{M}'$ est l'ensemble des éléments en relation avec $\mathfrak{b}$. On a $(\mathfrak{b} : (b_1))_d = \{t \in \mathfrak{b} \mid t(b_1) \subseteq \mathfrak{b}\} \supset \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b} : (b_2))_d \supset \mathfrak{b}$, de sorte que, compte-tenu de la quasi-irréductibilité de $\mathfrak{b}$,

$$(\mathfrak{b} : ((b_1),(b_2)))_d = (\mathfrak{b} : (b_1))_d \cap (\mathfrak{b} : (b_2))_d \supset \mathfrak{b},$$

d'où l'on conclut $b_1 + b_2 \in \mathfrak{M}'$.

*

Soit ensuite $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ un idéal réticulé et supposons $t \notin \mathfrak{a}$. Il existe un idéal quasi-irréductible maximal $\mathfrak{b}_t$ qui contient $\mathfrak{a}$ et ne contient pas $\underline{t}$, de sorte que $\mathfrak{a}$ s'écrit $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{b}_t$, $(t \notin \mathfrak{a})$. Par conséquent:

*

<u>Théorème 12</u>:- <u>Si $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réticulés, tout idéal réticulé est une intersection finie irrédundante d'idéaux primaux.</u>

*

Une intersection $\bigcap \mathfrak{a}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, d'idéaux réticulés est appelée quasi-réduite si aucun des $\mathfrak{a}_i$ ne peut être remplacé par un diviseur propre qui soit un idéal réticulé. Et une représentation irrédundante et quasi-réduite est dite quasi-normée. Alors:

*

<u>Théorème 13</u>:- <u>Soit $\mathfrak{b}$ un demi-anneau réticulé où la somme de deux idéaux réticulés est un idéal réticulé. Toute représentation irrédundante $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{b}_i$, $(i = 1, 2,$</u>

$\dots, n)$, à condition que les $\mathfrak{b}_i$ soient quasi-irréductibles, est quasi-normée. Si l'on pourrait avoir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_j' \cap (\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{b}_i), \quad \text{avec } \mathfrak{b}_j' \supset \mathfrak{b}_j,$$

et $\mathfrak{b}_j'$ idéal réticulé quasi-irréductible, l'hypothèse $\bigcap \mathfrak{b}_i \nsubseteq \mathfrak{b}_j$ entraînerait

$$\mathfrak{b}_j \subseteq \mathfrak{b}_j' \cap (\mathfrak{b}_j, \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{b}_i),$$

où le deuxième membre serait une intersection $\mathfrak{d}$ de deux idéaux contenant proprement $\mathfrak{b}_j$. Nous allons établir la relation $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}_j$. Prenons $x = b_j' = b_j + c$, avec $b_j' \in \mathfrak{b}_j'$, $b_j \in \mathfrak{b}_j$, $c \in \bigcap \mathfrak{b}_i$, $(i \neq j)$. Puisque $b_j + c \in \mathfrak{b}_j'$, on a aussi $c \in \mathfrak{b}_j'$, par conséquent $c \in \mathfrak{a}$. On en conclut $x = b_j + c \in \mathfrak{b}_j$, ce qui donne en effet $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}_j$. Le résultat contredit la quasi-irréductibilité de $\mathfrak{b}_j$.

*

Corollaire 4 :- Si $\mathfrak{L}$ vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réticulés et si le treillis de ces idéaux est un sous-treillis du treillis des idéaux de $\mathfrak{L}$, tout idéal réticulé admet une représentation quasi-normée finie au moyen d'idéaux primaux. De plus : À condition que ces idéaux primaux soient quasi-irréductibles, deux telles représentations contiennent le même nombre d'idéaux. La dernière assertion de cet énoncé tient au fait que les idéaux quasi-irréductibles forment un treillis modulaire.

*

La propriété d'un idéal réticulé contenir $x \leq a$, s'il contient a, est une circonstance fondamentale dont on devra tenir compte pour étendre aux idéaux réticulés des parties importantes de la théorie de représentation de Noether-Krull-Fuchs [1] [6]. En suivant [14] et [15], le lecteur peut facilement retrouver d'une manière successive les résultats que voici : 1) Soit $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{b}_\rho$, $(\rho \in N)$, une représentation quasi-réduite (finie ou non) au moyen d'idéaux primaux et désignons par $\mathfrak{M}_\rho$ les idéaux adjoints des $\mathfrak{b}_\rho$; alors, pour qu'on ait $b \in \mathfrak{M}'$, il faut et il suffit que b appartienne à un certain $\mathfrak{M}_\tau$, $(\tau \in N)$. 2) Dans la représentation précédente, $\mathfrak{a}$ est primal, si et seulement si $\bigcup \mathfrak{M}_\rho$ est un idéal. 3) Si $\mathfrak{b} = \bigcup \mathfrak{Y}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, est l'ensemble réunion des idéaux réticulés complètement premiers $\mathfrak{Y}_i$, tout idéal $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{b}$ est contenu dans un $\mathfrak{Y}_i$. 4) Soit $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{b}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, un idéal réticulé et supposons les $\mathfrak{b}_i$ des idéaux primaux d'adjoints $\mathfrak{M}_i$; alors, à condition que la représentation soit quasi-réduite, $\mathfrak{a}$ est un idéal primal, si et seulement s'il existe un $\mathfrak{M}_k$ de la forme $\mathfrak{M}_k = \bigcup \mathfrak{M}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$. 5) En revenant à la représentation quasi-réduite précédente, $\mathfrak{q}$ est un idéal complètement premier maximal appartenant à $\mathfrak{a}$, si et seulement si $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal dans l'ensemble des $\mathfrak{M}_i$. 6) En supposant valable la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réticulés, et aussi que la somme de deux idéaux réticulés est un idéal réticulé, à partir d'une représentation quasi-normée finie $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{b}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, au moyen d'idéaux quasi-irréductibles, on peut obtenir une représentation $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{t}_j$, $(j = 1, 2, \dots, n)$, où les $\mathfrak{t}_j$ sont les intersections de certains $\mathfrak{b}_i$, et, pourvu que chaque $\mathfrak{b}_i$ ne figure qu'une seule fois dans l'ensemble des $\mathfrak{t}_j$, la nouvelle représentation est quasi-normée. On arrive de cette façon au théorème suivant :

*

Théorème 14 :- Si $\mathfrak{L}$ vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réticulés et si le treillis de ces idéaux est un sous-treillis du treillis des idéaux de $\mathfrak{L}$, tout idéal réticulé admet une représentation quasi-normée finie au moyen d'idéaux primaux, de telle sorte que les idéaux adjoints respectifs soient maximaux dans l'ensemble qu'ils constituent. Et deux représentations vérifiant ces conditions ont le même nombre d'idéaux primaux et les idéaux adjoints sont les mêmes.

*

Un exemple très important d'idéaux réticulés est donné par l'annulateur à gauche $l(S) = \{x \in \mathfrak{L} \mid xS \subseteq 9\}$ d'un ensemble $S \subseteq \mathfrak{L}$. En effet :

*

* <u>Théorème 15</u>: - <u>Les annulateurs à gauche dans un demi-anneau réticulé sont des idéaux réticulés</u>. L'hypothèse $\mathcal{J} = \phi$ entraîne $l(S) = \phi$ et le théorème est vrai. Si $\mathcal{J} = (0)$, en remarquant que $l(S) = \bigcap l(s)$, $(s \in S)$, il suffit de démontrer le théorème pour $l(s)$. Or, si $x \in l(s)$, de $xs = 0$ et $y \equiv x$, on tire $ys \equiv xs$, $ys = 0$. D'autre part $(xt)s \equiv \equiv xs = 0$, et par conséquent $xt \in l(s)$. Et il en est de même pour $\underline{tx}$ et pour $x_1 + x_2$, si $x_1, x_2 \in l(s)$.

* Ce théorème montre que la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réticulés de $\mathcal{T}$ est plus forte que la condition de chaîne ascendante pour les annulateurs à gauche [ou condition 2) de Goldie]. La plupart des théorèmes sur les anneaux premiers et semi-premiers qu'on démontre chez [16] et [17], en admettant cette condition de Goldie peut être transposée pour les demi-anneaux réticulés et même pour les demi-anneaux en général. C'est ce que nous montrerons, en prouvant les deux propositions ci-dessous, sous les conditions $\mathcal{J}_d = \mathcal{J} = \mathcal{J}_e$.

* <u>Proposition 9</u>: - <u>Soit $\mathcal{T}$ un demi-anneau semi-premier vérifiant la condition 2) de Goldie. Alors, en prenant $x \in \mathcal{T}$, $x \notin \mathcal{J}$, il existe un idéal à gauche $\mathfrak{y} \supset \mathcal{J}$ tel que $\mathfrak{y} \cap l(x) = \mathcal{J}$.</u> Soit $l(z) \supseteq l(x)$, avec $z \notin \mathcal{J}$, un annulateur maximal, parmi les annulateurs de la forme $l(s)$ contenant $l(x)$, $[s \notin \mathcal{J}]$. Si l'on pourrait avoir $z\mathcal{T}x \subseteq \mathcal{J}$, on aurait $z\mathcal{T} \subseteq l(x) \subseteq l(z)$, ainsi que $z\mathcal{T}z \subseteq \mathcal{J}$, donc $z \in \mathcal{J}$. Par conséquent, $z\mathcal{T}x \nsubseteq \mathcal{J}$. Il existe $a \in \mathcal{T}$ tel que $zax \notin \mathcal{J}$. Mais $l(z) \subseteq \subseteq l(zax)$, et la maximalité de $l(z)$ entraîne $l(z) = l(zax)$. On en conclut que tout $w \in \mathcal{T}$ tel que $wzax \in \mathcal{J}$ vérifie la condition $wz \in \mathcal{J}$. Or, puisque $\mathcal{T}za \nsubseteq \mathcal{J}$, si $\underline{v}$ est tel que $vza \notin \mathcal{J}$, l'idéal à gauche $(vza)_e$ n'est pas contenu

dans $\mathcal{J}$; cependant on aura $(vza)_e \cap l(x) = \mathcal{J}$, car un élément de cette intersection sera de la forme $v'za$, avec $v' \in (v)_e$, $v'zax \in \mathcal{J}$, $v'z \in \mathcal{J}$, $v'za \in \mathcal{J}$. On répond donc à la <u>question</u> de l'énoncé en faisant $\mathfrak{y} = (vza)_e$.

* Un idéal à gauche f, de $\mathcal{T}$, est dit fermé, si, en supposant $b \notin f$, il existe $b' \notin \mathcal{J}$ tel que $b' \in (b)_e$, $(b')_e \cap f = \mathcal{J}$. Alors: 1_o) $\mathcal{T}$ est fermé. 2_o) Les idéaux à gauche fermés de $\mathcal{T}$ constituent une famille de Moore qui permet de construire la fermeture $\bar{\mathfrak{y}}$ d'un idéal à gauche $\mathfrak{y}$. 3_o) Les annulateurs $l(S) = \bigcap l(s)$, $(s \in S)$, sont fermés, comme on le voit de la façon suivante: Prenons $l(s)$ et soit $b \notin l(s)$, donc $bs \notin \mathcal{J}$; il existe, d'après la proposition 9, $\mathfrak{y} \supset \mathcal{J}$ tel que $\mathfrak{y} \cap l(bs) = \mathcal{J}$; par conséquent, en prenant $f \notin \mathcal{J}$, $f \in \mathfrak{y}$, on voit que $fbs \notin \mathcal{J}$, $b' = fb \notin \mathcal{J}$, et que $(b')_e \cap l(s) = \mathcal{J}$, puisque $x \in (b')_e \cap l(s)$ entraîne $x = f'b$, $f' \in (f)_e$, $f'bs \in \mathcal{J}$, donc $f' \in l(bs) \cap \mathfrak{y}$, c'est-à-dire $f' \in \mathcal{J}$, $x \in \mathcal{J}$.

* On donne, dans le cas des anneaux semi-premiers, une construction différente de $\bar{\mathfrak{y}}$, que nous allons transposer pour $\mathcal{T}$, en développant aussi les raisonnements d'une façon complète, puisqu'il y a quelques difficultés à surmonter.

* <u>Proposition 10</u>: - <u>Soit $\mathcal{T}$ un demi-anneau semi-premier vérifiant les conditions $\mathcal{J}_d = \mathcal{J} = \mathcal{J}_e$ et satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les annulateurs à gauche. Alors, la fermeture $\bar{\mathfrak{y}}$ de l'idéal à gauche $\mathfrak{y} \supset \mathcal{J}$ est définie par l'égalité</u>

$$\bar{\mathfrak{y}} = \{ g \in \mathcal{T} \mid \forall g' \notin \mathcal{J},\ g' \in (g)_e,\ \mathfrak{y} \cap (g')_e \supset \mathcal{J} \}. \qquad (1)$$

Appelons $\underline{F}$ le deuxième membre de l'égalité précédente. Puisque $\bar{\mathfrak{y}}$ est le plus petit des idéaux à gauche fermés contenant $\mathfrak{y}$, nous devons montrer que les éléments $\underline{g}$ constituent un idéal à gauche fermé contenant $\mathfrak{y}$ et qui est contenu dans tout idéal à gauche fermé contenant $\mathfrak{y}$. D'abord, il est évident que les éléments de

$\mathcal{Y}$ appartiennent à $\underline{F}$ et qui, en prenant $g \in F$, on a aussi $sg \in F$, $\forall s \in \mathcal{T}$. Il est moins simple de voir que $k = g + h \in F$, si $g \in F$ et $h \in F$. Il s'agit de montrer que, en supposant $k' \notin \mathcal{D}$, $k' \in (k)_\ell$, l'inclusion $\mathcal{Y} \cap (k')_\ell \supset \mathcal{D}$ est valable. Or $k' = \sum(nk + tk) = \sum(ng + nh + tg + th)$, où $\underline{n}$ est un nombre entier positif ou nul et $t \in \mathcal{T}$. On voit que $\underline{k'}$ appartient à la somme $((g)_\ell, (h)_\ell)$ des idéaux à gauche $(g)_\ell$ et $(h)_\ell$. Nous écrirons $k' = g' + h' + g'' + h'' + \cdots + g^{(n)} + h^{(n)}$, où $g', g'', \dots, g^{(n)} \in (g)_\ell$ et $h', h'', \dots, h^{(n)} \in (h)_\ell$. Si $\mathcal{Y}_0 \supset \mathcal{D}$ est tel que $\mathcal{Y}_0 \cap \ell(k') = \mathcal{D}$, en prenant $f_0 \notin \mathcal{D}$, $f_0 \in \mathcal{Y}_0$, on obtient $f_0 k' = f_0 g' + f_0 h' + f_0 g'' + f_0 h'' + \cdots + f_0 g^{(n)} + f_0 h^{(n)} \notin \mathcal{D}$, de sorte que, si $f_0 g''$, par exemple, est le premier terme de $f_0 k'$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$, on trouve cette situation : $f_0 g' \in \mathcal{D}$, $f_0 h' \in \mathcal{D}$, $f_0 g'' \notin \mathcal{D}$, $f_0 g'' \in (g'')_\ell \subseteq (g)_\ell$, $\mathcal{Y} \cap (f_0 g'')_\ell \supset \mathcal{D}$. Soit donc $f_{00} \notin \mathcal{D}$, $f_{00} \in \mathcal{Y} \cap (f_0 g'')_\ell$, avec $f_{00} = f_0' g''$, $f_0' \in (f_0)_\ell \subseteq \mathcal{Y}_0$, $f_0' \notin \mathcal{D}$. En écrivant $f_0' k' = f_0' g' + f_0' h' + f_0' g'' + f_0' h'' + \cdots + f_0' g^{(n)} + f_0' h^{(n)}$, les termes $f_0' g'$ et $f_0' h'$ continuent à appartenir à $\mathcal{D}$, mais $f_0' k' \notin \mathcal{D}$. La somme $f_0' g' + f_0' h' + f_0' g''$ appartient à $\mathcal{Y}$, puisqu'il en est ainsi de $f_0' g''$. Nous poursuivons. Si $f_0' h'' \in \mathcal{D}$, la somme $f_0' g' + f_0' h' + f_0' g'' + f_0' h''$ appartient à $\mathcal{Y}$. Au contraire, supposons $f_0' h'' \notin \mathcal{D}$. Alors, $f_0' h'' \in (h'')_\ell \subseteq (h)_\ell$ et $\mathcal{Y} \cap (f_0' h'')_\ell \supset \mathcal{D}$. Soit donc $f_{00}' \notin \mathcal{D}$, $f_{00}' \in \mathcal{Y} \cap (f_0' h'')_\ell$, avec $f_{00}' = f_0'' h''$, $f_0'' \in (f_0')_\ell \subseteq \mathcal{Y}_0$, $f_0'' \notin \mathcal{D}$. La somme $f_0'' g' + f_0'' h' + f_0'' g'' + f_0'' h''$ appartient à $\mathcal{Y}$. On arrive à construire $f \notin \mathcal{D}$, avec $f \in \mathcal{Y}_0$ et $fk' = fg' + \cdots + fg^{(n)} + fh^{(n)} \in \mathcal{Y}$, $fk' \notin \mathcal{D}$. La proposition est démontrée et on donne cet autre énoncé :

$\underline{\text{Théorème 16}}$:- $\underline{\text{Si } \mathcal{L} \text{ est un demi-anneau réticulé semi-premier}}$ $\underline{\text{qui vérifie la condition de chaîne ascendante}}$ $\underline{\text{pour les idéaux réticulés}}$, $\underline{\text{la fermeture } \mathcal{Y} \text{ de l'idéal à gauche } \mathcal{Y} \supset \mathcal{D}}$ $\underline{\text{est donnée par l'égalité (1).}}$

* Ce serait très important de pouvoir introduire dans la définition d'un demi-anneau des conditions supplémentaires capables de faire aboutir à une théorie de Wedderburn-Artin et à une théorie de Goldie. En ce qui concerne les théorèmes de Wedderburn-Artin, on les trouve sans doute démontrés chez [1?], sous des hypothèses très restrictives, mais il semble utile de chercher d'autres hypothèses; d'ailleurs on peut dire que la proposition 7 et la conséquence 3, énoncée après la proposition 8, constituent des théorèmes d'une telle sorte.

* * * *

BIBLIOGRAPHIE

1. Noronha Galvão, M. L.: Sobre a teoria de Noether-Krull em semi-anéis. Rev. Fac. Ci. Lisboa $\underline{8}$, 175-256 (1961).
2. Almeida Costa, A.: Sur la théorie générale des demi-anneaux, II. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, exposé 25 (1961).
3. —— Sur la théorie générale des demi-anneaux, I. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, exposé 24 (1961).
4. Bourne, S.: The Jacobson radical of a semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. $\underline{37}$, 163-170 (1951).
5. Almeida Costa, A.: Sur les μ-demi-anneaux. Math. Z. $\underline{108}$, 10-14 (1968).
6. —— Sur la théorie générale des demi-anneaux. Publ. Math. Debrecen $\underline{10}$, 14-29 (1963).
7. Smith, D. A.: On semigroups, semirings and rings of quotients. J. Sci. Hiroshima 30, 123-130 (1966).

8. Bourne, S.: On multiplicative idempotents of a potent semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42, 632-638 (1956).

9. Iséki, K.: Ideals in semirings. Proc. Japan Acad. 34, 29-31 (1958).

10. Bourne, S. et Zassenhaus, H.: On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 43, 613-615 (1957).

11. Iséki, K.: Quasiideals in semirings without zero. Proc. Japan Acad. 34, 79-81 (1958).

12. Noronha Galvão, M.L. et Almeida Costa, A.: Sur le demi-anneau des nombres naturels. Ann. Fac. Ci. Porto 48, 35-39 (1965).

13. Schwarz, Š.: On semigroups having a kernel. Czechoslovak Math. J. 1, 229-264 (1951).

14. McCoy, N.H.: Rings and radicals. Carus Monograph Series, nº 8 (1948).

15. Curtis, C.W.: On additive ideal theory in general rings. Amer. J. Math. 74, 687-700 (1952).

16. Lesieur, L. et Croisot, R.: Sur les anneaux premiers noethériens à gauche. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 76, 161-183 (1959).

17. Divinsky, N.J.: Rings and radicals. Math. Expositions, nº 14, Toronto, (1965).