ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

Sobre as relações de invariância em reticulados

por

Maria Luisa Noronha Galvão
e
A. Almeida Costa

LISBOA
1 9 7 2

Sobre as relações de invariância em reticulados

1. *Relações de Zassenhaus*

Se $R = \{a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots\}$ é um reticulado modular, sabe-se que ele pode ser caracterizado das duas maneiras seguintes:

I: $a_1 \overset{=}{<} a_2$ e $b_1 \overset{=}{<} b_2$ arrastam a perspectividade do intervalo

$$[a_1 \vee (a_2 \wedge b_1),\ a_1 \vee (a_2 \wedge b_2)], \quad [(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2),\ a_2 \wedge b_2];$$

II: $a_1 \overset{=}{<} a_2$ e $b_1 \overset{=}{<} b_2$ arrastam a igualdade

$$(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2) = [(a_2 \wedge b_1) \vee a_1] \wedge b_2.$$

Por consequência, I ou II bastam para demonstrar o teorema das subdivisões equivalentes e, portanto, o teorema de Jordan-Hölder.

Tomemos uma relação binária η, sobre R, tal que $a \,\eta\, b$ implique $a \overset{=}{<} b$. Então, uma das duas condições seguintes, equivalentes entre si:

Z'_3: $a_1 \,\eta\, a_2$ e $b_1 \,\eta\, b_2$ implicam a perspectividade dos dois intervalos da afirmação I;

Z_3: $a_1 \,\eta\, a_2$ e $b_1 \,\eta\, b_2$ implicam a igualdade da afirmação II;

basta para garantir que duas séries — η

$$a = a_0 \overset{=}{<} a_1 \overset{=}{<} \ldots \overset{=}{<} a_n = b, \qquad a = b_0 \overset{=}{<} b_1 \overset{=}{<} \ldots \overset{=}{<} b_m = b$$

admitem subdivisões equivalentes. Estas subdivisões não são geralmente séries — η. Juntando a Z'_3 ou a Z_3 a condição

$$Z'_2:\quad a_1 \,\eta\, a_2 \text{ e } b_1 \,\eta\, b_2 \text{ arrastam } [a_1 \vee (a_2 \wedge b_1)] \;\eta\; [a_1 \vee (a_2 \wedge b_2)],$$

as subdivisões equivalentes, construídas como habitualmente, são já séries — η. É conveniente observar que as séries — η são sempre supostas finitas.

Diz-se *relação de Zassenhaus* uma relação binária η que verifica as condições Z'_3, Z'_2 e

$$Z'_1:\quad a_1 \,\eta\, a_2 \text{ e } b_1 \,\eta\, b_2 \text{ implicam } [(a_2 \wedge b_1) \vee (a_1 \wedge b_2)] \;\eta\; (a_2 \wedge b_2).$$

Pondo $Z_1 = Z'_1$ uma relação de Zassenhaus define-se por um dos dois sistemas de condições:

$$Z'_k,\ (k = 1,\, 2,\, 3)\,; \qquad Z_k,\ (k = 1,\, 2,\, 3)\,;$$

$$Z_2:\quad a_1 \,\eta\, a_2 \text{ e } b_1 \,\eta\, b_2, \text{ com } b_2 \overset{=}{<} a_2 \text{ implicam } (a_1 \vee b_1) \;\eta\; (a_1 \vee b_2).$$

2. *Relações de invariância*

Aqui, como na Secção anterior, η será sempre tal que $a \,\eta\, b$ implica $a \overset{=}{<} b$. Seja então η uma relação binária sobre R. Diremos que η verifica a *condição* I_1, se

$$I_1:\quad a \,\eta\, c \text{ e } b \overset{=}{<} c \text{ implicam } (a \wedge b) \;\eta\; b.$$

I_1 é equivalente a qualquer das duas condições seguintes:

$$I'_1:\quad a \,\eta\, b \text{ implica } (a \wedge z) \;\eta\; (b \wedge z), \qquad \forall z \in R;$$

$$I''_1:\quad a \,\eta\, (a \vee b) \text{ implica } (a \wedge b) \,\eta\, b \text{ e } a \,\eta\, b, \text{ com } a \overset{=}{<} x \overset{=}{<} b,$$
$$\text{implica } a \,\eta\, x.$$

Esta condição I_1 garante, por exemplo, o resultado seguinte:

TEOREMA 1: — *Supondo* $a = a_o \overset{=}{<} a_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_i \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_k \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_n = c$ e $b = b_o \overset{=}{<} b_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} b_j \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} b_l \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} b_m = c$ *duas séries* — η, *a condição* I_1 *basta para que existam séries* — η *entre* $a_i \wedge b_j$ *e* a_k, $(k \overset{=}{>} i)$, *e entre* $a_i \wedge b_j$ *e* b_l, $(l \overset{=}{>} j)$.

Uma relação binária η verificando I_1, Z_2 e Z_3 diz-se uma *relação de invariância*. Trata-se de uma relação mais forte que uma relação de Zassenhaus.

Por exemplo, no reticulado semi-modular

$$a \circ\!< b \circ\!< d \circ\!< e; \; a \circ\!< b \circ\!< g \circ\!< e;$$
$$a \circ\!< f \circ\!< g \circ\!< e; \; a \circ\!< f \circ\!< c \circ\!< e;$$

onde $\circ\!<$ significa «cobertura», a relação η, definida pondo

$$x \,\eta\, y, \quad \text{se} \quad x, y \neq c \quad \text{e} \quad x \overset{=}{\circ\!<} y$$

é uma relação de Zassenhaus mas não é uma relação de invariância, pois que I_1 não é verificada.

Uma relação de invariância é sempre uma relação de Zassenhaus, porque I_1 e Z_2 implicam Z_1 e Z_2. Um exemplo de relação de invariância é dado pelo reticulado dos subgrupos dum grupo, escrevendo $x \,\eta\, y$ com o significado de «x invariante em y». Pode mostrar-se que, num reticulado R, a relação $\overset{=}{\circ\!<}$ é uma relação de invariância, se e só se $x \circ\!< x \vee y$ implica $x \wedge y \circ\!< y$.

Sempre que, dada uma relação η, se tenha $a \neq b$, $a \,\eta\, b$ e não exista série-η entre a e b da forma $a < \dots < z < \dots < b$, escrever-se-à $a << b$.

É, então, extremamente importante, para o estudo das séries-η de composição e para os problemas de comprimento ligados a essas séries, o seguinte:

TEOREMA 2: — *Tomando a relação de invariância* η, *se* $a < < b$ *e se existe uma série-*η *entre* $z \wedge b$ *e* b, *ou se tem* $a \wedge z < < b \wedge z$ *ou* $a \wedge z = b \wedge z$.

3. *Séries-*η *de composição*

Damos aqui nota dos dois enunciados que se seguem, nos quais η se supõe uma relação de invariância e $c\eta\ (x, y)$ significa o comprimento de uma série-η de composição entre x e y.

TEOREMA 3: — *Se* $a = a_0 \overset{=}{<} a_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_i \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_n = c$ *é uma série-*η *e* $b = b_0 \overset{=}{<} b_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} b_m = c$ *é uma série-*η *de composição, existem séries-*η *de composição entre* $a_i \wedge b_j$ *e* a_i.

TEOREMA 4: — *Se* $b = b_0 \overset{=}{<} b_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} b_m = a \vee b$ *é uma série-*η *de composição e* $a = a_0 \overset{=}{<} a_1 \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a_n = a \vee b$ *é uma série-*η, *tem-se* $c\eta\ (a \wedge b, a) \overset{=}{<} c\eta\ (b, a \vee b)$. *E é necessário e suficiente, para que seja* $c\eta\ (a \wedge b, a) = c\eta\ (b, a \vee b)$, *que, para todo o elemento* z *tal que* $b \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} z \overset{=}{<} \dots \overset{=}{<} a \vee b$ *seja uma série-*η, *se tenha* $b \vee (a \wedge z) = (b \vee a) \wedge z$.

MARIA LUISA NORONHA GALVÃO
A. ALMEIDA COSTA

(Comunicação apresentada na sessão da classe de Ciências em 20 de Julho de 1972)

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ALMEIDA COSTA, *Cours d'Algèbre Générale*, vol. 1, 1969, Lisboa.
[2] M.ª L. NORONHA GALVÃO, *Sobre o teorema de Jordan-Hölder em reticulados*, 1970, Lisboa.