NOTA SÔBRE A INTEGRAÇÃO DOS SISTEMAS CANÓNICOS

POR

A. ALMEIDA COSTA

Na *Mecânica* de LEVI-CIVITA encontra-se enunciado o seguinte teorema de LIE relativo aos sistemas canónicos: dado o sistema

$$(1) \qquad \frac{dx_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_h}, \quad (h=1,2,\ldots,n)$$

o conhecimento de m integrais em involução, resolúveis em ordem a outros tantos p_h, determina a redução do sistema anterior a outro sistema canónico com $2(n-m)$ equações.

Para demonstrar êste teorema, vamos servir-nos de alguns resultados que se encontram estabelecidos no livro de E. GOURSAT, *Intégration des équations aux dérivées partielles du 1.er ordre.*

1) Recordemos um importante teorema de LIE: Dado o sistema

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i\left(x_1\, x_2 \ldots x_n;\ \frac{\partial z}{\partial x_{r+1}} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \quad (i=1,2,\ldots,r)$$

suposto em involução, se os segundos membros são funções analíticas dos diferentes argumentos na vizinhança do ponto de $x_i = x_i^0$, $\frac{\partial z}{\partial x_j} = q_j^0$ $(j = r+1, \ldots, n)$, existe um e um só integral holomorfo do sistema, o qual se torna numa função dada $\psi(x_{r+1} \dots x_n)$, quando se faz $x_1 = x_1^0, \dots, x_r = x_r^0$. A função ψ satisfaz unicamente às condições

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)_0 = q_j^0$$

e é holomorfa.

A determinação dêsse integral pode fazer-se utilizando uma transformação devida a MAYER. Se pusermos

(3) $$x_1 = x_1^0 + t, \quad x_i = x_i^0 + ty_i, \quad (i = 2, \dots, r)$$

o sistema (2) converte-se noutro em que figura a equação

(4) $$\frac{\partial z}{\partial t} = f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_r f_r.$$

Ora existe um e um só integral desta equação que, para $t = 0$, se reduz a uma função dada de $x_{r+1} \dots x_n$. A transformação (3) faz passar, em seguida, ao integral desejado de (2).

Um integral completo de (4) depende de $n - r + 1$ constantes arbitrárias; outrotanto sucede com um integral completo do sistema (2). Há, assim, equivalência entre a integração de (4) e (2).

No livro citado de GOURSAT encontra-se mesmo uma demonstração directa desta proposição. O raciocínio é devido a MAYER.

2) Recordemos ainda que há equivalência, mediante uma quadratura, entre a integração do sistema (1) e a da equação

(5) $$P + H(t, x_h, p_h) = 0, \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{\partial V}{\partial t}, \\ p_h &= \frac{\partial V}{\partial x_h}. \end{aligned} \right.$$

Se fôrem $f_1(x_1 \dots x_n;\ p_1 \dots p_n t), \dots, f_m$ os integrais conhecidos de (1), temos, por hipótese,

$$\triangle_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_h} \frac{\partial f_j}{\partial x_h} - \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial f_j}{\partial p_h} \right) = 0.$$

Associando à variável t a variável P, é anàlogamente

$$(f_i, f_j) = \triangle_{ij} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial P} \frac{\partial f_j}{\partial t} - \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial P} \right) = 0.$$

Como os integrais f_i verificam a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial V}{\partial x_h} - \frac{\partial H}{\partial x_h} \frac{\partial V}{\partial p_h} \right) = 0,$$

vê-se que têm lugar as igualdades

$$(f_i, P + H) = 0.$$

3) Considerando agora o sistema

(6) $$\begin{aligned} &P + H = 0, \\ &f_1 = a_1, \dots, f_m = a_m, \end{aligned}$$

onde $a_1, \dots, a_m$ são constantes quaisquer, estamos em presença dum sistema em involução. E para se ter um integral completo da primeira equação basta ter um integral completo do sistema. Escrito sob a forma

$$\begin{aligned} &P = -H \\ &p_1 = \varphi_1, \dots, p_m = \varphi_m, \end{aligned}$$

resolvida em ordem a $P, p_1, \dots, p_m$, é ainda um sistema em involução. A transformação de MAYER reduz êste sistema de $m+1$ equações com $n+1$ variáveis independentes a uma equação única com $n-m+1$ variáveis.

A equação transformada é da forma (5) e o sistema canónico correspondente comporta $2(n-m)$ equações. Fica assim feita a demonstração desejada.

4) Não há, evidentemente, necessidade de que os integrais f_i sejam resolúveis em ordem a outros tantos p_i. O papel das variáveis x_h, p_h pode trocar-se no sistema (1), bastando mesmo que os integrais f_i sejam distintos.

A equação (5) vai ser tratada directamente para se chegar a êsse resultado.

Suponhamos, com efeito, que apenas os primeiros v integrais $f_i = a_i$ se podem resolver em ordem a $p_1, p_2, \dots, p_v$, dando

$$p_1 - \psi_1 = 0, \dots, p_v - \psi_v = 0. \tag{7}$$

A substituïção dêstes pp por $\psi\psi$ nas restantes funções f_i leva a $\psi_{v+1}, \dots, \psi_m$, que são independentes dos pp. Estas últimas funções estão ainda em involução com os primeiros membros de (7).

Se considerarmos o sistema jacobiano

$$(p_1 - \psi_1, f) = 0, \dots, \quad (p_v - \psi_v, f) = 0,$$

ou, sob forma desenvolvida,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{h=v+1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} \right) + \sum_{h=1}^{v} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} = 0,$$

....

$$\frac{\partial f}{\partial x_v} + \sum_{h=v+1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} - \frac{\partial \psi_v}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} \right) + \sum_{h=1}^{v} \frac{\partial \psi_v}{\partial x_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} = 0,$$

vêmos que as funções $\psi_{v+1}, \dots, \psi_m$ verificam o sistema linear

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{h=v+1}^{n} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_v} - \sum_{h=v+1}^{n} \frac{\partial \psi_v}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0, \tag{8}$$

sendo, por isso, funções distintas quando se consideram unicamente funções de $x_{v+1} \dots x_m$. Para o verificar, basta notar que o sistema (8) admite $n-v$ integrais distintos e que podemos juntar às funções $\psi_{v+1} \dots \psi_m$ integrais que representaremos por $\psi_{m+1}, \dots, \psi_n$. Os nossos $n-v$ integrais são funções distintas relativamente às variáveis $x_{v+1}, \dots, x_n$. E não podendo ser nulos todos os menores de $m-v$ linhas ou colunas do determinante $\dfrac{D(\psi_{v+1} \dots \psi_m \dots \psi_n)}{D(x_{v+1} \dots x_m \dots x_n)}$, é possível resolver em ordem a $m-v$ das quantidades $x_{v+1} \dots x_n$ o sistema

$$\psi_{v+1} = a_{v+1}, \dots, \psi_m = a_m.$$

Designaremos essas quantidades com $x_{v+1} \dots x_m$.

6) Posto isto, retomemos o sistema (6) e tomemos como variáveis independentes

$$t, \; x'_1 = x_1, \dots, x'_v = x_v, x'_{v+1} = p_{v+1}, \dots, x'_m = p_m,$$
$$x'_{m+1} = x_{m+1}, \dots, x'_n = x_n,$$

e como incógnita

$$U = V - p_{v+1} x_{v+1} - \dots - p_m x_m.$$

Temos

$$\begin{aligned} dU = {} & Pdt + p_1 dx_1 + \dots + p_v dx_v + p_{v+1} dx_{v+1} + \dots + p_m dx_m + \dots + p_n dx_n \\ & - p_{v+1} dx_{v+1} - \dots - p_m dx_m - x_{v+1} dp_{v+1} - \dots - x_m dp_m \\ = {} & Pdt + p_1 dx'_1 + \dots + p_v dx'_v + p_{m+1} dx'_{m+1} + \dots + p_n dx'_n \\ & - x_{v+1} dx'_{v+1} - \dots - x_m dx'_m. \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que é

$$\frac{\partial U}{\partial t}=P,\ \frac{\partial U}{\partial x_1'}=p_1,\ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_v'}=p_v,\ \frac{\partial U}{\partial x_{m+1}'}=p_{m+1},\ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n'}=p_n,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_{v+1}'}=-x_{v+1},\ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_m'}=-x_m.$$

O sistema (6) fica transformado no sistema

$$\frac{\partial U}{\partial t}+H'=0, \tag{8}$$

$$f_1'=a_1,\ldots,\ f_m'=a_m,$$

onde se designa com f' a transformada de f. Êste sistema está ainda em involução e pode ser resolvido em ordem a $\frac{\partial U}{\partial t},\ \frac{\partial U}{\partial x_1'},\ldots,\ \frac{\partial U}{\partial x_m'}$.

À equação única que o teorema de Lie faz substituir ao sistema assim resolvido corresponde ainda um sistema canónico de $2(n-m)$ equações.

O teorema de Lie do enunciado desta nota constitui, assim generalizado, o que podemos chamar o teorema de Mayer relativo aos sistemas canónicos.