NOTA SÔBRE O INTEGRAL DE JACOBI DAS EQUAÇÕES DE 1.ª ORDEM

POR

A. ALMEIDA COSTA

Fazendo intervir a teoria das características de CAUCHY vamos, nesta pequena nota, mostrar como devem ser escolhidos os elementos iniciais para se obter o integral completo dado por JACOBI. (Veja-se o primeiro método de JACOBI no livro de E. GOURSAT, *Équations aux dérivées partielles du 1.er ordre)*.

Seja a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x_i, \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

que escreveremos, pondo $y_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_i, y_i) = 0.$$

As características são dadas pelo sistema diferencial [1]

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial H}{\partial y_i}} = \frac{-dy_i}{\frac{\partial H}{\partial x_i}} = \frac{dt}{1} = \frac{dV}{\sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i} - H},$$

que escreveremos sob a forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dV}{dt} = \sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i} - H.$$

[1] Tem-se em vista a equação proposta.

Integrado o sistema canónico e obtido o integral geral

$$x_i = \varphi_i(t, x_i^0, y_i^0, t^0), \qquad y_i = \psi_i(t, x_i^0, y_i^0, t^0), \tag{2}$$

onde figuram os valores iniciais x_i^0, y_i^0 de x_i, y_i, correspondente a $t = t^0$, vem depois

$$V = \int_{t^0}^{t} \left(\sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i} - H \right) dt + V^0, \tag{3}$$

onde V^0 é o valor de V para $t = t^0$.

Ora JACOBI deu o seguinte integral completo da equação (1):

$$V = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 y_i^0 + \int_{t^0}^{t} \left(\sum y_i \frac{\partial H}{\partial y_i} - H \right) dt + a_{n+1}, \tag{4}$$

onde a_{n+1} é uma constante arbitrária e onde x_i^0, y_i devem ser substituídos pelos seus valores expressos em t, x_i, y_i^0, tirados de (2). A quantidade t^0 supõe-se ter um valor determinado.

Para se deduzirem de (2) e (3) integrais da equação (1), os elementos t^0, x_i^0, y_i^0, $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$ têm de ser convenientemente escolhidos; deverão ser satisfeitas as duas relações

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 + H(t^0\, x_i^0\, y_i^0) = 0,$$

$$\delta V^0 - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 \delta t^0 - y_1^0 \delta x_1^0 - \ldots - y_n^0 \delta x_n^0 = 0,$$

onde os $\delta\delta$ são diferenciais que não subentendem t.

Tomemos t^0 como um valor determinado, os y_i^0 como constantes, a derivada $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0$ dada pela primeira das equações anteriores e os x_i^0 como variáveis independentes. Vê-se que vem

$$V^0 = \sum y_i^0 x_i^0 + a_{n+1}.$$

Substituindo êste valor em (3), temos precisamente o integral completo (4), pois devemos eliminar em (3) os x_i^0 e os y_i por intermédio de (2).