J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º volume

Curso Complementar do Ensino Secundário

Edição GEP

LISBOA

COMPÊNDIO
DE
MATEMÁTICA

J. SEBASTIÃO E SILVA

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

2.º VOLUME

CURSO COMPLEMENTAR
DO ENSINO SECUNDÁRIO

1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

Av. Miguel Bombarda, 20 — Lisboa

O texto deste *Compêndio* foi utilizado no âmbito de uma experiência de modernização do ensino da matemática em Portugal, dirigida pelo Prof. Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação Nacional em colaboração com a O. C. D. E. (Projecto Especial STP-4/SP). Nesta experiência estiveram envolvidos alunos dos antigos 6.º e 7.º anos do ensino liceal (idades entre 15 e 17 anos).

NOTA PRÉVIA

O 2.º volume do texto-piloto contém, ainda mais do que o 1.º e o 3.º, matérias que não são de modo algum obrigatórias nos cursos-pilotos e que aparecem devidamente assinaladas com asteriscos ou notas ao fundo da página. A inclusão dessas matérias foi determinada pelas seguintes considerações:

1.º Ao professor interessa adquirir conhecimentos para além dos que precisa de ministrar, a fim de que possa ter ideias mais precisas sobre as finalidades do seu ensino.

2.º A indicação de bibliografia para a aquisição de tais conhecimentos não basta. Ao professor convém um texto orgânico, onde as novas noções apareçam devidamente concatenadas e que lhe permita economizar aquilo de que tanto carece: tempo.

3.º Há que estimular ao máximo os alunos talentosos, facultando-lhes a leitura fácil de certos assuntos para além do programa. (Num importante projecto internacional para melhoria do ensino matemático nos países árabes, propõe-se um ensino matemático especial para os alunos excepcionalmente dotados e ainda o recurso a competições para os seleccionar e orientar, à semelhança do que se faz noutros países.)

4.º Os alunos que forem frequentar as cadeiras de Matemáticas Gerais e Álgebra Linear, em Faculdades de Ciências ou Institutos Superiores, ficarão a possuir, nos textos-pilotos, elementos de informação e esclarecimento, que lhes permitirão superar mais facilmente o fosso que se tem vindo a cavar entre ensino liceal e ensino universitário, quer em *conteúdo científico,* quer em *forma de ensino*.

ADVERTÊNCIA

O texto-piloto para o 7.º ano compõe-se de 2 volumes, dos quais este é o primeiro — embora seja o segundo em relação ao do 6.º ano. A divisão do Compêndio do 7.º ano em dois volumes tornou-se necessária por imposições da própria experiência, que não permitiu, desde logo, chegar a uma redacção definitiva. Hão-de notar-se por isso algumas pequenas repetições, para as quais se chama oportunamente a atenção do leitor.

Esta divisão tem no entanto vantagens, porquanto a índole diferente dos assuntos — mais acentuadamente de análise infinitesimal neste volume e mais acentuadamente de álgebra e geometria no seguinte — torna aconselhável que tais assuntos sejam tratados, tanto quanto possível, *em paralelo* e não *em série* (no regime de bifurcação já adoptado no 6.º ano), a fim de se obter o melhor aproveitamento possível.

Aliás, no *Guia* para a *Utilização do Compêndio de Matemática* (1.º volume) do texto-piloto do 6.º ano já foi salientado que a ordem lógica na apresentação dos assuntos não é, muitas vezes, a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Devemos, pelo contrário, procurar seguir um caminho *em ziguezague, de tentativa e erro, por aproximações sucessivas,* semelhante ao da investigação. Numa palavra, convém seguir, tanto quanto possível, o método *heurístico.*

O assunto com que abre este volume — CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO, em íntima ligação com a TEORIA DOS LIMITES e como base heurística para a introdução ao CÁLCULO DIFERENCIAL —

além da importância capital que está a assumir na Sociedade Moderna, com o rapidíssimo desenvolvimento da Automação é, pela sua própria essência, uma concretização típica do método de tentativa e erro, e dos processos de aproximações sucessivas, que caracterizam afinal todo o esforço de adaptação do homem ao mundo em que vive, procurando compreendê-lo cada vez melhor, para depois tentar transformá-lo a seu favor (as explorações espaciais ilustram bem o que se acaba de dizer).

Nesta ordem de ideias, é no fim e não no princípio que deverão aparecer, em forma explícita, os fundamentos da aritmética e da análise, com a formulação das respectivas axiomáticas. Assim estaremos a seguir o *método analítico,* característico da investigação, em vez do *método sintético,* de que se faz uso e abuso na exposição de tipo tradicional.

Convém ter presente que, tal como no texto-piloto do 6.º ano, uma boa parte das matérias aqui expostas não é obrigatória, destinando-se, em princípio, a elucidação dos professores e, eventualmente, a satisfazer a curiosidade dos alunos mais interessados. *Não só por isto, mas também porque os assuntos são tratados com grande generosidade em exemplos e em considerações de ordem geral e humana, os textos atingem um número elevado de páginas, o que seria injusto e demasiado simplista tomar como base de uma crítica sobre a extensão de programa.*

Deve ainda salientar-se que, embora enquadrada nas recomendações gerais da O.C.D.E. para modernização do ensino da matemática, a concepção destes textos é quase cem por cento original, como se pode verificar, confrontando-os com livros congéneres estrangeiros.

Aproveitamos esta oportunidade para deixar aqui expressos os nossos vivos agradecimentos ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil, pela amável colaboração que se dignou prestar-nos através da sua Divisão de Mecânica Aplicada.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

§ 1. CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO

1. **Considerações prévias intuitivas.** Já várias vezes tem sido observado ao aluno que, em matemática aplicada, o conceito de '*verdadeiro*' da lógica bivalente cede o lugar, inevitavelmente, ao conceito de '*aproximadamente verdadeiro*' e ao de '*provavelmente verdadeiro*', que já não se subordinam ao esquema lógico do 'ser ou não ser', porque neles subsiste sempre, em última análise, uma componente subjectiva. Quando digo 'esta mesa tem 2 metros de comprimento', não pretendo afirmar uma proposição verdadeira, mas apenas referir um facto que *eu* considero aproximadamente verdadeiro. Aliás, ninguém pode ter a pretensão de afirmar que certo objecto material tem *exactamente* 2 metros de comprimento, porque tal afirmação seria desprovida de sentido. E o que se diz para comprimentos, aplica-se a áreas, volumes, tempos, massas, forças, temperaturas, etc., sempre que se trata de indicar resultados de medições.

Mas qual o critério que permite distinguir uma proposição *aproximadamente verdadeira* de outra que *o não é?*

É claro que, tal como em questões concretas de probabilidades e estatística, não existe nenhum critério inteiramente *objectivo* para esse efeito: a distinção é sempre mais ou menos *subjectiva* e *variável*, isto é, depende do *sujeito* que julga, bem como das circunstâncias e dos fins em vista.

Quando se diz por exemplo que a distância de Lisboa ao Porto, por estrada, é de cerca de 330 km, dá-se uma indicação útil, com aproximação *suficiente*, para fins de transporte em veículo automóvel. Mas se, em vez disso, dissermos que tal distância é de cerca de 500 km, já cometemos um *erro grosseiro*.

Para certos fins, um erro de 1 km é insignificante. Para outros, um erro de 1 mm é enorme. As recentes explorações espaciais fornecem exemplos de ambos os casos; mas não é preciso recorrer a tais exemplos, porque, a cada passo, nos encontramos perante situações semelhantes. Assim, por exemplo, pode ser importante o erro de alguns centímetros no comprimento de uma casa a construir; mas o mesmo erro deixará de ter significado na medição da altura de uma árvore, e ninguém, dotado de bom senso, se lembraria de exigir a medida da altura de uma árvore aproximada até aos milímetros. O erro de um decigrama, que não tem a mínima importância na pesagem de uma porção de manteiga, pode ser fatal na confecção de um produto farmacêutico. A temperatura de um doente costuma ser avaliada até aos décimos de grau centígrado; mas uma tal aproximação já é desnecessária para indicar a temperatura ambiente num dado lugar.

O erro de um décimo na classificação de um aluno não tem geralmente importância. Mas o erro de um valor pode ser decisivo. E é preciso não esquecer o carácter subjectivo de tais avaliações: verificam-se às vezes diferenças de um ou mais valores, em provas classificadas por professores igualmente cuidadosos e justos.

Inúmeros outros exemplos poderiam ser aqui apresentados.

Aliás, um problema análogo se levanta, ainda antes desse, na distinção entre '*números grandes*' e '*números pequenos*'. Que quer dizer 'número grande' e 'número pequeno'? É claro que não existe definição matemática de tais termos: um mesmo número pode ser considerado 'grande' ou 'pequeno', conforme as pessoas e as circunstâncias. Se ouvirmos dizer que, num desafio de futebol, o resultado foi de 15 a 0, não hesitaremos em afirmar que o número 15 (de golos) é muito grande. Mas, se nos disserem que o número de alunos de uma turma é 15, já achamos que esse número é pequeno. E pode ser que, dentro de alguns anos, o mesmo número de alunos de uma turma já não venha a ser considerado pequeno. Mas, note-se: em qualquer dos casos, dizer que um número *não é pequeno* não equivale a dizer que esse número *é grande*, uma vez que a distinção entre os dois atributos 'grande' e 'pequeno' não é geralmente rígida. Na verdade, diz-se muitas vezes, a respeito de um número ou de uma grandeza: 'não é grande, mas também não é pequeno'.

O mesmo se verifica, dum modo geral, com a maior parte dos juízos que formulamos a cada momento. Quando afirmamos, a respeito dum aluno, 'é inteligente' ou 'é aplicado', torna-se evidente o carácter *subjectivo* (e *relativo*) de tais afirmações: pode haver pessoas que tenham opinião contrária e pessoas que não tenham essa opinião nem a contrária, mas apenas opinião *dubitativa*. O mesmo quando dizemos 'faz calor', 'esta sala é quadrada', etc., etc. Assim, na vida corrente, o princípio do terceiro excluído deixa de ser válido: além dos valores 'verdadeiro' e 'falso', aparecem-nos os valores 'duvidoso', 'provavelmente verdadeiro', 'aproximadamente verdadeiro', etc.

As considerações anteriores suscitam, desde logo, uma dúvida:

Como é possível fundar uma teoria matemática de valores aproximados — ou seja, uma teoria *rigorosa* de coisas *não rigorosas?*

O leigo pensa, consciente ou inconscientemente, que tal não é possível e, por isso, ao ouvir falar de 'cálculo numérico aproximado' (ou de 'processos de cálculo aproximado'), julga estar em presença de matemática pouco rigorosa, que é como quem diz, de *matemática degenerada*. Ora isto, sim, é um erro grosseiro, que convém desde logo contrariar.

Assim como o cálculo das probabilidades é uma teoria matematicamente certa de coisas incertas, assim também o cálculo numérico aproximado é uma teoria matematicamente exacta de coisas inexactas.

Afinal, toda a matemática aplicada — a começar pela geometria, aplicada à física e à técnica — assenta, necessariamente, numa *teoria rigorosa* de coisas que, na prática, *não são rigorosas*.

Aliás, como teremos ocasião de ver, é o estudo dos valores aproximados que conduz naturalmente à *teoria dos limites,* base de toda a ANÁLISE INFINITESIMAL, que, tal como a aritmética dos números naturais, pode ser desenvolvida com rigor lógico impecável, a partir de um sistema de axiomas. O cálculo numérico aproximado que vamos estudar contém já, sob forma embrionária, o CÁLCULO DIFERENCIAL que, juntamente com o CÁLCULO INTEGRAL, constitui o CÁLCULO (ou ANÁLISE) INFINITESIMAL.

Aqui vemos, pois, mais um exemplo típico de interacção fecunda entre a *teoria* e a *prática*. O que torna muitas vezes difícil aos alunos a compreensão da teoria dos limites é, em grande parte, a separação artificial que se estabelece entre os dois termos do par *teoria-prática,* ou seja entre *matemática pura* e *matemática aplicada.*

Aliás, o cálculo numérico aproximado está a assumir importância cada vez maior nos tempos actuais, com o desenvolvimento dos computadores electrónicos e suas aplicações à vida das sociedades modernas, às investigações espaciais, etc., tendo conduzido à criação de um novo ramo da matemática: a ANÁLISE NUMÉRICA.

2. **Erro de um valor aproximado.** Vimos que é impossível definir matematicamente 'valor aproximado', assim como é impossível definir 'número grande' ou 'número pequeno'. *No entanto, já é possível definir matematicamente 'erro de um valor aproximado'.*

Por exemplo, se considerarmos o número 3,16 como valor aproximado de π, podemos afirmar 'o erro desse valor aproximado de π

é inferior a 0,02' — o que é uma proposição *verdadeira* (e não apenas *aproximadamente verdadeira*). Analogamente, é *verdadeira* a proposição:

'Se tomarmos o número 3,141 como valor aproximado de π, cometemos um erro inferior a 0,001'.

Porém, agora, trata-se de um *erro por defeito* (quer dizer $3{,}141 < \pi$), enquanto no exemplo anterior o erro é *por excesso* (quer dizer $\pi < 3{,}16$).

Assim, finalmente, podemos chegar a uma definição matematicamente rigorosa de 'erro de um valor aproximado':

DEFINIÇÃO 1. Seja x um número real qualquer e δ um número positivo (isto é, > 0). Chama-se *valor aproximado de* x *com erro inferior* a δ todo o número real x_1 tal que

$$|x_1 - x| < \delta$$

Convém recordar aqui (com exemplos) que o *módulo de um número real* u, que se representa por $|u|$, é igual a u, se $u \geqslant 0$, e é igual a $-u$ se $u \leqslant 0$. Portanto, escrever $|x_1 - x| < \delta$ equivale a escrever

$$x_1 - x < \delta \quad , \quad \text{se} \quad x_1 - x \geqslant 0$$

$$x - x_1 < \delta \quad , \quad \text{se} \quad x_1 - x \leqslant 0$$

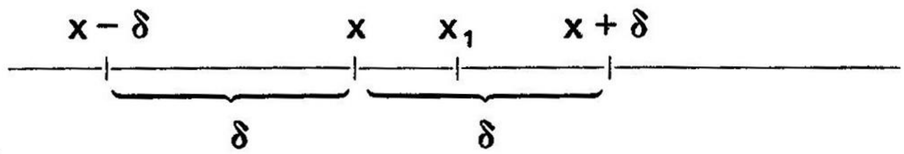
Daqui resulta:

$$|x_1 - x| < \delta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x + \delta & \text{se} \quad x_1 \geqslant x \\ x_1 > x - \delta & \text{se} \quad x_1 \leqslant x \end{cases}$$

e, portanto, como é fácil de ver,

$$(1) \qquad \boxed{|x_1 - x| < \delta \;\Leftrightarrow\; x - \delta < x_1 < x + \delta}$$

Já sabemos que o conjunto dos valores de x_1 que verificam esta condição é $]x - \delta,\ x + \delta[$. Este intervalo é chamado *a vizinhança* (δ) *de* x.



Assim, por definição:

A *vizinhança* (δ) *de* x é o conjunto de todos os valores aproximados de x com erro inferior a δ.

Note-se que, na definição anterior, não se define o significado da expressão com *duas* variáveis:

x_1 *é valor aproximado de* x,

mas sim o da expressão com *três* variáveis:

x_1 *é valor aproximado de* x *com erro inferior a* δ.

Define-se portanto, aqui, uma *relação ternária* e não uma *relação binária*. Convém notar que se apresenta uma situação análoga com o atributo 'grande', aplicado a números. Na verdade, não se define em matemática a *propriedade absoluta:*

$$x \text{ é grande} \quad (\text{no universo } \mathbb{R}).$$

mas sim a *propriedade relativa:*

$$x \text{ é maior que } y,$$

ou, mais precisamente, a relação binária $>$. (Como se tem visto, é substituindo o *absoluto* pelo *relativo* que se consegue, em geral, maior rigor lógico em ciência.)

CONVENÇÃO:

Em vez de '*valor aproximado de* x *com erro inferior a* δ', também se diz, para brevidade de linguagem:

valor aproximado de x *a menos de* δ

A definição 1 é completada com a seguinte:

DEFINIÇÃO 2. Chama-se *erro de* x_1 *como valor aproximado de* x (ou *erro de* x_1 *em relação a* x) precisamente $|x_1 - x|$. Diz-se que o erro de x_1 é *por excesso* ou *por defeito,* conforme $x_1 \geqslant x$ ou $x_1 \leqslant x$ [1].

---

(1) Neste *Compêndio* adoptámos a definição de 'erro de valor aproximado' como 'módulo do desvio desse valor'. No entanto, os alunos devem ser prevenidos de que, muitas vezes, se chama 'erro' precisamente àquilo a que chamamos aqui 'desvio'.

Assim, como se vê, *qualquer* número real x_1 pode ser considerado como valor aproximado de x, em matemática pura, pois o que se define apenas é o *grau de aproximação,* indicado pelo número δ.

Convém ainda fazer uma distinção entre 'erro' e 'desvio', que será muito útil, como veremos:

DEFINIÇÃO 3. Chama-se *desvio de* x_1 *em relação ao número* x a diferença $x_1 - x$.

Assim, o *desvio de* x_1 *em relação a* x será um número positivo, negativo ou nulo, ao contrário do erro de x_1 em relação a x, que é sempre superior ou igual a zero — por ser precisamente o *módulo do desvio.*

Quando estiver subentendido o valor x_1 de que se trata, designaremos pelo símbolo Δx o desvio de x_1 em relação a x, isto é, poremos:

$$\boxed{\Delta x = x_1 - x}$$

Mas, basta comparar os dois membros para se ver que a notação Δx é incompleta, se não estiver subentendido o valor aproximado x_1 a que se refere o desvio.

Como sinónimo de 'desvio', hão-de aparecer-nos, depois, os termos 'variação' e 'acréscimo', quando se tratar de funções.

NOTAS:

I. Na fórmula (1) podemos trocar os papéis de x e x_1, aplicando o princípio de substituição de variáveis aparentes. Assim:

$$|x_1 - x| < \delta \Leftrightarrow x_1 - \delta < x < x_1 + \delta$$

isto é: x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *sse* x *pertence ao intervalo* $]x_1 - \delta, \ x_1 + \delta[$.

II. Na prática, os números reais são medidas de grandezas. Assim, o que se diz quanto a erros e desvios para números, aplica-se *mutatis mutandis* a grandezas, expressas pelas respectivas medidas, em relação a uma unidade.

EXERCÍCIOS — I. Indique os desvios e os erros dos números

$$-1, \quad 0, \quad 2, \quad 3, \quad 2{,}1, \quad 2{,}3, \quad 2{,}34, \quad 2{,}339$$

em relação a 2,34.

II. Indique diversos valores aproximados de $\sqrt{3}$ a menos de 0,02 por excesso e por defeito.

III. Sabendo que 4,73 é valor aproximado dum número α a menos de 0,05, indique:

a) Uma vizinhança de α, tão pequena quanto possível, a que pertença o número 4,73[1].

b) Dois números tão próximos quanto possível, entre os quais esteja α.

Dê nova resposta à segunda alínea sabendo que: 1) 4,73 é valor aproximado de α por defeito; 2) 4,73 é valor aproximado de α por excesso.

---

(1) O intervalo $]\alpha - 0{,}05; \alpha + 0{,}05[$.

IV. Sendo α um número real qualquer e δ um número positivo, identifique: *a*) o conjunto dos valores aproximados de α por defeito a menos de δ; *b*) o conjunto dos valores aproximados de α por excesso a menos de δ; *c*) a reunião dos dois conjuntos.

V. Sabe-se que a massa de um corpo é de 5,328 kg, com erro inferior a 3 g. Entre que limites está compreendida a massa do corpo?

VI. *a*) Sabendo que 4,37 é valor aproximado dum número α a menos de 0,02, indique um valor aproximado de α, por defeito, a menos de 0,04, e um valor aproximado de α, por excesso, a menos de 0,04.

b) Sabendo que *a* é valor aproximado de α a menos de δ, indique um valor aproximado de α por defeito e outro por excesso, a menos de $2\,\delta$. Enuncie o teorema contido na resposta.

VII. Sabendo que 0,27 é valor aproximado de α, por defeito, a menos de 0,05, indique um valor aproximado de α a menos de 0,03.

3. **Algarismos exactos dum valor aproximado.** Suponhamos, por exemplo, que 3,5835 é valor aproximado dum número α com erro inferior a 0,002. Então é fácil ver que

$$3{,}5815 < \alpha < 3{,}5855$$

Por conseguinte, *até ao algarismo das centésimas,* a dízima que representa α só pode ser 3,58. Diremos, por isso, que o número 3,5835 é *valor aproximado de α com três algarismos exactos.*

Analogamente, suponhamos que 4 853 420 é valor aproximado dum número β com erro inferior a 4 000. Temos então

$$4\,849\,420 < \beta < 4\,857\,420$$

e vemos que o número 4 853 420 é valor aproximado de β com *dois* algarismos exactos. Também podemos escrever:

$$\beta \approx 4{,}853 \times 10^6 \text{ (com erro inferior a 5000)}$$

Ainda neste caso, diremos, por exemplo, que 0,04853 é valor aproximado de $\beta \times 10^{-8}$ com *dois* algarismos exactos. Dum modo geral:

Com algarismos exactos só contam algarismos significativos, isto é, algarismos que não sejam zeros à esquerda (precisamente aqueles que intervêm na determinação da mantissa do logaritmo ou na utilização da régua de cláculo) [1].

4. **Majoração do erro de uma soma.** Sejam x, y dois números reais e tomemos dois números x_1, y_1 como valores aproximados de x e de y, respectivamente.

---

[1] Os computadores mais rápidos têm sistema de *vírgula flutuante*, isto é, dão por um lado os algarismos significativos e, por outro lado, um número inteiro igual à característica do logaritmo.

Ora

$$(1) \qquad (x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y)$$

O primeiro membro de (1) é o desvio de $x_1 + y_1$ em relação a $x + y$. Por sua vez $x_1 - x$ é o desvio de x_1 em relação a x e $y_1 - y$ o desvio de y_1 em relação a y. Assim, a fórmula (1) pode exprimir-se *abreviadamente*, dizendo:

O desvio da soma é igual à soma dos desvios das parcelas.

Ou ainda, simbolicamente:

$$(2) \qquad \boxed{\Delta (x + y) = \Delta x + \Delta y}$$

pondo $\Delta(x + y) = (x_1 + y_1) - (x + y)$, $\Delta x = x_1 - x$, $\Delta y = y_1 - y$

Daqui e da propriedade do módulo da soma deduz-se:

$$(3) \qquad \boxed{|\Delta (x + y)| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|}$$

Como *o erro é o módulo do desvio,* esta fórmula pode exprimir-se abreviadamente dizendo:

O erro da soma é sempre inferior ou igual à soma dos erros das parcelas.

Convém, ainda, notar o seguinte:

A fórmula (3) *pode ser substituída pela igualdade*

$$|\Delta(u+v)| = |\Delta u| + |\Delta v|$$

se e só se os erros das parcelas são ambos por excesso ou ambos por defeito (neste caso o erro da soma será também por excesso ou por defeito, respectivamente).

Estes resultados estendem-se, *mutatis mutandis,* a mais de duas parcelas.

Chama-se *majorante* (ou *maiorante*) dum número α, qualquer número $\alpha' \geqslant \alpha$. *Majorar* um número α é achar um majorante de α. Assim, a fórmula (3) pode ser chamada FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA SOMA.

Analogamente, chama-se *minorante* dum número α, qualquer número $\alpha' \leqslant \alpha$.

EXEMPLOS:

I. Sabe-se que 3,14 é valor aproximado de π, por defeito, a menos de 0,01, e que 1,41 é valor aproximado de $\sqrt{2}$, por defeito, a menos de 0,01. Logo, o número $3{,}14 + 1{,}41 = 4{,}55$ é valor aproximado de $\pi + \sqrt{2}$, por defeito a menos de 0,02.

II. Sabe-se que 0,528, 3,032 e 4,530 são valores aproximados de três números α, β, γ, a menos de 0,002, 0,003, 0,005, respectivamente. Logo, o número $0{,}528 + 3{,}032 + 4{,}530$ é valor aproximado de $\alpha + \beta + \gamma$ a menos de 0,01.

5. **Cálculo aproximado de uma soma com erro inferior a um número dado.** Nos problemas do número anterior são dados valores aproximados x_1, y_1, ..., de números x, y, ..., com erros inferiores a números positivos também dados, e procura-se um majorante do erro da soma $x_1 + y_1 + \dots$. Consideremos, agora, o problema inverso (em primeiro lugar com duas parcelas):

Sejam x, y *números reais. Dado um número positivo* δ, *achar valores aproximados* x_1, y_1 *de* x *e* y *tais que* $x_1 + y_1$ *seja um valor aproximado de* $x + y$ *com erro inferior a* δ.

Ponhamos, como anteriormente:

$$x_1 - x = \Delta x \quad , \quad y_1 - y = \Delta y \quad , \quad (x_1 + y_1) - (x + y) = \Delta(x + y)$$

Trata-se, pois, de achar um número ε tal que, sendo

$|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, se tenha $|\Delta (x + y)| < \delta$. Ora

$$|\Delta (x + y)| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$$

Então, se for $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$|\Delta (x + y)| \leqslant 2\,\varepsilon$$

Portanto, para se ter $|\Delta (x + y)| < \delta$, basta que seja $2\,\varepsilon = \delta$, isto é, $\varepsilon = \delta/2$. Em resumo:

TEOREMA. *Para calcular a soma de dois números com erro inferior a* δ, *basta tomar valores aproximados desses números com erro inferior a* $\varepsilon = \delta/2$.

Assim, podemos afirmar o seguinte:

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0: |\,\Delta x\,| < \varepsilon \wedge |\,\Delta y\,| < \varepsilon \Rightarrow |\,\Delta\,(x + y)\,| < \delta$$

O teorema anterior estende-se, evidentemente, a somas com mais de duas parcelas: *basta substituir* 2 *por* n, *sendo* n *o número de parcelas*.

EXERCÍCIOS:

I. Calcular $\pi + \sqrt{2}$ a menos de 0,001 (por defeito).

II. Calcular

$$\pi + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{5}{3}$$

com erro inferior a 0,05, por excesso.

6. **Erro do valor simétrico e erro do valor absoluto.** É fácil reconhecer o seguinte:

TEOREMA 1. *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *também* $-x_1$ *é valor aproximado de* $-x$ *a menos de* δ, *e reciprocamente.*

Com efeito, este teorema é traduzido pela seguinte expressão simbólica:

$$x - \delta < x_1 < x + \delta \Leftrightarrow -x - \delta < -x_1 < -x + \delta$$

cuja dedução é imediata *(justifique)*.

Ao mesmo tempo, vê-se que:

Se x_1 *é valor aproximado de* x *por defeito,* $-x_1$ *é valor aproximado de* $-x$ *por excesso (e vice-versa).*

Com efeito:

$$x_1 < x \Rightarrow -x_1 > -x \quad , \quad x_1 > x \Rightarrow -x_1 < -x$$

Por outro lado:

TEOREMA 2. *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *também* $|x_1|$ *é valor aproximado de* $|x|$ *a menos de* δ.

Demonstração:

Suponhamos que x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ. Quer isto dizer que

$$(1) \qquad |x_1 - x| < \delta$$

Ora, segundo as regras de adição e subtracção de números reais, o módulo da diferença de dois números nunca pode ser inferior à diferença dos módulos desses números. Por exemplo:

$$|5-(-3)| = 8 > |5| - |(-3)|$$

$$|(-3)-(-5)| = 2 = |(-5)| - |(-3)|$$

Em resumo: *o módulo da diferença de dois números é sempre* *superior ou igual ao módulo da diferença dos módulos desses números.* Temos, pois,

$$|x_1 - x| \geqslant \Big| |x_1| - |x| \Big| \quad , \quad \forall x, x_1 \in \mathbb{R},$$

donde, atendendo a (1):

$$\Big| |x_1| - |x| \Big| < \delta$$

Mas isto quer dizer, precisamente, que $|x_1|$ *é valor aproximado de* $|x|$ *a menos de* δ.

EXEMPLO. Suponhamos que $-0{,}04$ é valor aproximado dum número α a menos de 0,05. Então, segundo o teorema 1, 0,04 é valor aproximado de $-\alpha$ a menos de 0,05, isto é, tem-se:

$$-0{,}01 < -\alpha < 0{,}9.$$

Ao mesmo tempo, aplicando o teorema 2, podemos afirmar que 0,04 é valor aproximado de $|\alpha|$ a menos de 0,05. Mas não temos elementos para poder afirmar que α é positivo, que é negativo ou que é nulo. Porquê?

7. **Majoração do erro de uma diferença.** Visto que a diferença $x - y$ de dois números x, y é igual a $x + (-y)$ a majoração do erro da diferença reduz-se à da soma de x com $-y$. Em particular:

Se x_1 *é valor aproximado de* x *por defeito e* y_1 *é valor aproximado de* y *por excesso, então* $x_1 - y_1$ *é valor aproximado de*

$x - y$ *por defeito (e vice-versa,* trocando as palavras 'defeito' e 'excesso'). Por exemplo, sabemos que 1,414 é valor aproximado de $\sqrt{2}$ por defeito a menos de 0,001 e que 3,142 é valor aproximado de π, por excesso, a menos de 0,001. Então, o número

$$1{,}414 - 3{,}142 = -1{,}628$$

será um valor aproximado de $\sqrt{2} - \pi$, por defeito, a menos de 0,002.

Suponhamos agora que 4,38 e 1,59 são valores aproximados, ambos por defeito, de dois números α e β, respectivamente, a menos de uma centésima. Então, o número

$$4{,}38 - 1{,}59 = 2{,}79$$

é valor aproximado de $\alpha - \beta$ a menos de 0,01, *mas não sabemos se por excesso se por defeito.*

8. **Majoração do erro de um produto.** Sejam x_1, y_1 valores aproximados de dois números reais x, y, respectivamente, e ponhamos, como anteriormente, $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$. Então:

$$(1) \qquad x_1 = x + \Delta x \quad , \quad y_1 = y + \Delta y$$

donde

$$x_1 y_1 = xy + x\,\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$

ou seja

$$(2) \qquad x_1y_1 - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

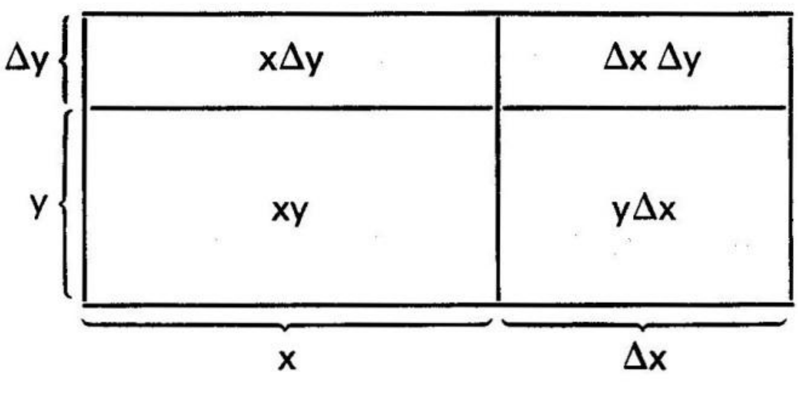
Ora podemos pôr, segundo a notação anterior:

$x_1y_1 - xy = \Delta\,(xy)$ (desvio de x_1y_1 em relação a xy)

Então (2) pode escrever-se:

$$(3) \qquad \boxed{\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y}$$

Esta fórmula é a importante FÓRMULA DO DESVIO DO PRODUTO, cuja interpretação geométrica intuitiva se encontra na figura que a seguir se apresenta no caso em que $\Delta x > 0$ e $\Delta y > 0$.



A figura fala por si e o aluno deve relacioná-la com as fórmulas anteriores sem auxílio alheio.

De (3) deduz-se, por exemplo:

$$\Delta(xy) = x\Delta y + (y + \Delta y)\,\Delta x$$

ou seja, atendendo a (1):

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y_1 \Delta x \tag{4}$$

Daqui vem, por sua vez:

$$|\Delta(xy)| \leqslant |x|\,|\Delta y| + |y_1|\,|\Delta x| \quad \textit{(justifique)} \tag{5}$$

Seja, agora, $\hat{x}$ um majorante de $|x|$ e $\hat{y}$ um majorante de $|y_1|$, isto é: $\hat{x} \geqslant |x|$, $\hat{y} \geqslant |y_1|$ [1].

Então de (5) virá, pela monotonia da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$:

$$\boxed{|\Delta(xy)| \leqslant \hat{x}\,|\Delta y| + \hat{y}\,|\Delta x|} \tag{6}$$

Esta é, pois, uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO PRODUTO.

---

(1) É claro que nada impede de trocar aqui os papéis de x e y, visto que a multiplicação é comutativa. O símbolo $\hat{x}$ lê-se 'x circunflexo' ou 'x chapéu'. O mesmo para $\hat{y}$, etc.

EXEMPLO. Suponhamos que 4,538 e 0,5327 são valores aproximados de dois números x e y, respectivamente, a menos de 0,001 e de 0,0001. Neste caso, tem-se:

$$|x| = x < 4{,}539 \quad , \quad |y_1| = y_1 = 0{,}5327$$

e assim podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 5 \quad , \quad \hat{y} = 1$$

Como $|\Delta y| = 0{,}0001$ e $|\Delta x| = 0{,}001$, virá, aplicando (6):

$$|\Delta(xy)| \leqslant 5 \times 0{,}0001 + 0{,}001 = 0{,}0015$$

Por conseguinte o produto

$$4{,}538 \times 0{,}5327 = 2{,}4173926$$

é um *valor aproximado de* xy *a menos de* 0,0015.

Suponhamos, agora, que os números 4,538 e 0,5327 são valores aproximados de x e y por defeito (com erros inferiores a 0,001 e 0,0001, respectivamente). Então, o produto desses números é valor aproximado de xy, por defeito a menos de 0,0015, isto é:

$$2{,}4173926 \leqslant xy < 2{,}4188926$$

Ficam, portanto, determinados apenas *três* algarismos exactos de xy:

$$xy = 2{,}41\ldots$$

Mas, é claro que 2,417 é ainda um *melhor* valor aproximado de xy (a menos de 0,002, por defeito). Os restantes algarismos decimais é que já não interessam ([1]).

NOTAS IMPORTANTES:

I. Para obter o produto de dois números com *n* algarismos exactos (incluindo a parte inteira, se esta não é nula) é necessário *geralmente* conhecer os factores com $n + 1$ algarismos exactos. Assim, no exemplo anterior, os factores são dados com 4 algarismos exactos e o produto é obtido com 3 algarismos exactos: *perdeu-se, portanto, um algarismo exacto*. Mas algumas vezes perde-se mais de um algarismo exacto; outras vezes, pelo contrário, não se perde nenhum.

II. No caso em que $x = x_1$, é claro que a fórmula (3) do desvio do produto se reduz à seguinte:

$$\Delta (xy) = x\Delta y,$$

sendo, neste caso, mais fácil a majoração do erro do produto. Analogamente se $y = y_1$.

II. Ainda a respeito da fórmula (3), que dá o desvio de um produto, convém notar o seguinte:

Quando os erros $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$ são *bastante pequenos*, o termo $\Delta x \Delta y$ da fórmula (3) é *muito pequeno* em relação aos dois primeiros

---

([1]) O aluno poderá resolver outros exercícios deste tipo; mas convém escolher números com menos algarismos, para evitar cálculos demasiado laboriosos.

e pode, então, ser *desprezado* na prática. Assim, em vez de (3), podemos escrever:

(3') $$\boxed{\Delta\,(xy) \approx x\,\Delta\,y + y\,\Delta\,x}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO PRODUTO, que, nas referidas circunstâncias, pode substituir a fórmula *exacta* (3). Veremos depois como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a fórmula (3') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

9. **Cálculo aproximado de um produto com erro inferior a um número dado.** Consideremos, agora, o problema inverso do que foi estudado no número anterior:

Dado arbitrariamente um número $\delta > 0$, *achar valores aproximados* x_1, y_1 *de dois números* x, y, *de tal modo que o produto* x_1y_1 *seja valor aproximado do produto* xy *com erro inferior a* δ.

Sejam x_1 e y_1 valores aproximados de x e y (respectivamente), com erro inferior a um número ε *a determinar.* Continuemos a representar por $\Delta(xy)$ o desvio $x_1y_1 - xy$. *O que se pretende, precisamente, é determinar* ε *de modo que seja:*

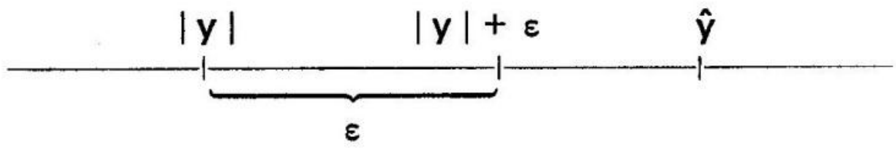
$$|\,\Delta\,(xy)\,| < \delta$$

Para isso, tomemos um número $\hat{x} \geqslant |x|$ e um número $\hat{y} > |y|$. Então, se obrigarmos ε a verificar a condição

$$(1) \qquad \varepsilon \leqslant \hat{y} - |y|$$

tem-se:

$$(2) \qquad |y| + \varepsilon \leqslant \hat{y}$$



Ora, sendo y_1, valor aproximado de y a menos de ε, também $|y_1|$ é valor aproximado de $|y|$ a menos de ε (ver n.º 6), e portanto [1]

$$|y_1| < |y| + \varepsilon$$

donde, atendendo a (2):

$$|y_1| < \hat{y}$$

---

[1] É claro que nos podíamos limitar aqui a *números positivos,* o que dispensava a notação de módulo. Mas, convém-nos a hipótese mais geral de números reais, para poder aplicar, depois, este teorema à teoria dos limites.

Assim, $\hat{x}$ é um majorante de $|x|$ e $\hat{y}$ um majorante de $|y_1|$, o que nos permite aplicar a fórmula do número anterior:

$$|\Delta(xy)| \leqslant \hat{x}\,|\Delta x| + \hat{y}\,|\Delta y|$$

Como, além disso, $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$|\Delta(xy)| < (\hat{x} + \hat{y})\,\varepsilon$$

Por conseguinte, será $|\Delta(xy)| < \delta$, *se for*

$$(\hat{x} + \hat{y})\,\varepsilon \leqslant \delta \quad \text{ou seja} \quad \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}}$$

em que, como se disse, $\hat{x} \geqslant |x|$ e $\hat{y} > |y|$, Além disso, ε deve ainda verificar a condição (1). Assim, em conclusão:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *determinados números reais. Então, qualquer que seja* $\delta > 0$, *existe pelo menos um* $\varepsilon > 0$ *tal que o produto de dois valores aproximados de* x *e* y *a menos de* ε *é, com certeza, valor aproximado de* xy *a menos de* δ. *Um tal número* ε *pode ser qualquer número positivo que verifique simultâneamente as duas condições:*

$$(3) \qquad \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{\hat{x} + \hat{y}} \quad , \quad \varepsilon \leqslant \hat{y} - |y|,$$

sendo $\hat{x}$, $\hat{y}$ *números quaisquer tais que*

$$\hat{x} \geqslant |x| \quad , \quad \hat{y} > |y| \text{ (}^1\text{)}$$

(1) É claro que os papéis de x e de y podem ser trocados neste teorema.

A primeira parte do teorema pode ser traduzida simbolicamente pela fórmula

$$\forall \delta > 0, \ \exists \varepsilon > 0 : \ |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta (xy)| < \delta$$

Mas, é preciso não esquecer o seguinte:

Ao contrário do que sucede no caso da soma, o número ε *procurado depende agora não só de* δ, *mas também dos próprios números* x, y, *como se vê pelas fórmulas* (3).

EXEMPLO. Suponhamos que se pretende achar um valor aproximado de $\pi\sqrt{2}$ com erro inferior a 0,001. Neste caso, pondo $x = \pi$, $y = \sqrt{2}$, podemos tomar por exemplo:

$$\hat{x} = 4 \quad , \quad \hat{y} = 2$$

Procuraremos, agora, um número ε tal que

$$\varepsilon \leqslant \frac{0{,}001}{4+2} \quad , \quad \varepsilon \leqslant 2 - \sqrt{2}$$

Um número que verifica a primeira condição é 0,0001. Ora, este número verifica também a segunda condição, visto que $\sqrt{2} < 1{,}5$ e portanto $1 - \sqrt{2} > 1 - 1{,}5 = 0{,}5$. Logo, podemos tomar

$$\varepsilon = 0{,}0001$$

isto é:

Para calcular $\pi\sqrt{2}$ *com erro inferior a* 0,001, *bastará tomar valores aproximados de* π *e de* $\sqrt{2}$ *com erro inferior a* 0,0001, *ou seja, aproximados até às décimas milésimas.*

10. **Majoração do erro de um quociente.** Sejam x_1 e y_1 valores aproximados de dois números x e y, respectivamente, e suponhamos que se tem $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$. Continuando a usar as notações anteriores, temos:

$$x_1 = x + \Delta x \quad , \quad y_1 = y + \Delta y \tag{1}$$

donde

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} \tag{2}$$

$$= \frac{(xy + y\Delta x) - (xy + x\Delta y)}{y\ (y + \Delta y)}$$

Pondo, agora

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y},$$

deduzimos de (1) e (2) a FÓRMULA DO DESVIO DO QUOCIENTE:

$$\boxed{\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy_1}} \tag{3}$$

Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$\left| \Delta \frac{x}{y} \right| \leqslant \frac{|x|\,|\Delta y| + |y|\,|\Delta x|}{|y|\,|y_1|} \qquad \textit{(justifique)}$$

Seja, agora, $\hat{x}$ um majorante de $|x|$, $\hat{y}$ um majorante de $|y|$ e $\bar{y}$ um número *positivo*, tal que

$$\bar{y} \leqslant |y| \quad \text{e} \quad \bar{y} \leqslant |y_1| \text{ (}^1\text{)}$$

Então, virá (²):

$$(4) \qquad \left|\Delta \frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{\hat{x}\,|\Delta y| + \hat{y}\,|\Delta x|}{\bar{y}^2}$$

Esta é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO QUOCIENTE.

EXEMPLO. Suponhamos que 0,23232 e 3,1416 são valores aproximados de dois números x e y, a menos de 0,000 01 e 0,000 1, respectivamente. Neste caso podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 0{,}3 \quad , \quad \hat{y} = 4 \quad , \quad \bar{y} = 3$$

Assim:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{0{,}3 \times 0{,}0001 + 4 \times 0{,}00001}{9} < 0{,}000\,008$$

Suponhamos, além disso, que o primeiro valor (dividendo) é aproximado por defeito, e que o segundo (divisor) é aproximado

---

(¹) Diz-se, neste caso, que $\bar{y}$ é um minorante positivo de $|y|$ e $|y_1|$. O símbolo $\bar{y}$ lê-se 'y traço' ou 'y barra'.

(²) Aumentando o dividendo, o quociente aumenta; diminuindo o divisor, o quociente aumenta. Isto é: $a < b \Rightarrow a/c < b/c$, $b > c \Rightarrow a/b < a/c$ (em $\mathbb{R}$). Justifique, aplicando princípios de equivalência de inequações.

por excesso. Então o quociente é aproximado por defeito e tem-se, calculando o quociente até às milionésimas:

$$0{,}073949 < \frac{x}{y} < 0{,}073957$$

O quociente de x por y fica, pois, determinado com *três* algarismos exactos: perderam-se, portanto, *dois* algarismos exactos (geralmente, na divisão, perde-se apenas um algarismo exacto, tal como na multiplicação). Mas, note-se que o número 0,07394 é valor aproximado de x/y a menos de 0,00002.

Outros exemplos análogos poderiam ser apresentados. Convirá no entanto, para exercícios, escolher números com menos algarismos, a fim de evitar cálculos demasiado laboriosos.

NOTAS:

I. No caso particular em que $y = y_1$, é claro que a fórmula (3) do desvio do quociente se simplifica, dando:

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{\Delta x}{y}$$

Neste caso, a majoração do erro do quociente será mais fácil.

II. Relativamente à fórmula (3), convém ainda observar o seguinte:

Na prática, quando o erro $|\Delta y|$ é *bastante pequeno em rela-*

ção a $|y|$, é desprezável o erro que se comete, substituindo y_1 por y em (3). Assim, em vez de (3), podemos escrever:

$$(3') \qquad \boxed{\Delta \frac{x}{y} \approx \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO QUOCIENTE que, nas referidas circunstâncias, pode substituir a fórmula exacta (3). Mais tarde veremos como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a própria fórmula (3') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo conceito de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

11. **Cálculo aproximado de um quociente com erro inferior a um número dado.** Consideremos, agora, o problema inverso do anterior:

Dado arbitrariamente $\delta > 0$, *achar valores aproximados* x_1, y_1 *de dois números* x, y, *de modo que o quociente* x_1/y_1 *seja aproximado do quociente* x/y *a menos de* δ (com $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$).

Sejam x_1, y_1 valores aproximados de x, y (respectivamente), com erro inferior a um número ε *a determinar,* e continuemos a designar por $\Delta(x/y)$ o desvio $x_1/y_1 - x/y$. Pretende-se, pois, determinar ε de modo que seja

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| < \delta$$

Para isso, tomemos arbitrariamente um número $\hat{x} \geqslant |x|$, um número $\hat{y} \geqslant |y|$ e um número $\bar{y}$ tal que

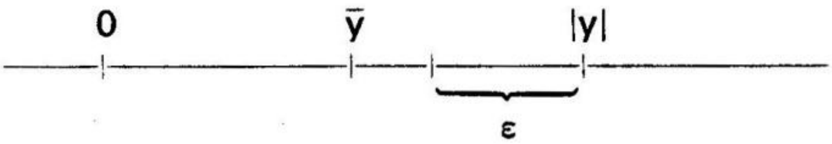
$$0 < \bar{y} < |y|$$

Então, se ε verificar a condição

$$\varepsilon \leqslant |y| - \bar{y}$$

tem-se:

$$(1) \qquad \bar{y} \leqslant |y| - \varepsilon$$



Ora, sendo y_1 valor aproximado de y a menos de ε, também $|y_1|$ é valor aproximado de $|y|$ a menos de ε e tem-se:

$$|y| - \varepsilon < |y_1|$$

donde, atendendo a (1):

$$\bar{y} < |y_1|$$

Assim, $\bar{y}$ é um minorante positivo de $|y|$ e $|y_1|$, e, como $\hat{x}$, $\hat{y}$ são majorantes de $|x|$ e $|y|$, respectivamente, podemos aplicar a FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO QUOCIENTE:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| \leqslant \frac{\hat{x}\,|\Delta y| + \hat{y}\,|\Delta x|}{\bar{y}^2}$$

Como, além disso, $|\Delta x| < \varepsilon$ e $|\Delta y| < \varepsilon$, virá:

$$\left|\Delta \frac{x}{y}\right| < \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\bar{y}^2}\,\varepsilon$$

Por conseguinte, será $|\Delta\,(x/y)| < \delta$, desde que seja

$$\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\bar{y}^2}\,\varepsilon \leqslant \delta, \text{ e que equivale a } \varepsilon \leqslant \frac{\bar{y}^2}{\hat{x} + \hat{y}}\,\delta$$

Em conclusão:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais e suponhamos* $y \neq 0$. *Então, para todo* $\delta > 0$, *existe pelo menos um* $\varepsilon > 0$, *tal que o quociente de um valor aproximado de* x *a menos de* ε *por um valor aproximado de* y *a menos de* ε *é valor aproximado de* x/y *a menos de* δ. *Um tal número* ε *pode ser qualquer número positivo que verifique as duas condições*

$$\varepsilon \leqslant \frac{\bar{y}^2}{\hat{x} + \hat{y}}\,\delta \quad , \quad \varepsilon \leqslant |y| - \bar{y},$$

sendo $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\bar{y}$, *números quaisquer tais que*

$$\hat{x} \geqslant |x| \quad , \quad \hat{y} \geqslant |y| \quad , \quad 0 < \bar{y} < |y|$$

A primeira parte do teorema é traduzida pela fórmula:

$$\forall\,\delta,\ \exists\,\varepsilon:\ |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow \left|\Delta\,\frac{x}{y}\right| < \delta$$

Tal como no caso do produto, o número ε procurado depende não só de δ, *mas também de* x *e* y.

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt{2}/\pi$ a menos de 0,001. Pondo $x = \sqrt{2}$, $y = \pi$, podemos tomar, por exemplo:

$$\hat{x} = 2 \quad , \quad \hat{y} = 4 \quad , \quad \bar{y} = 3$$

Procuremos, agora, um número ε tal que

$$\leqslant \varepsilon \frac{9}{2+4} \times 0{,}001 \quad , \quad \varepsilon \leqslant \pi - 3$$

Um número que verifica a primeira condição é 0,0015. Ora, este número verifica também a segunda condição, visto que $\pi > 3{,}1$ e, portanto, $\pi - 3 > 0{,}1$. Logo, podemos tomar $\varepsilon = 0{,}0015$ ou mesmo

$$\varepsilon = 0{,}001$$

isto é:

Para calcular $\sqrt{2}/\pi$ *a menos de* 0,001, *basta tomar valores aproximados de* $\sqrt{2}$ *e de* π *até às milésimas.*

EXERCICIOS:

I. Sendo $\alpha = 0{,}252\ldots$ e $\beta = 3{,}141\ldots$, calcular $\alpha + \beta$, $\beta - \alpha$, $\alpha\beta$ e α/β, com o maior número possível de algarismos exactos.

II. Sabendo que a base e a altura dum triângulo medem respectivamente 26,3 cm e 5,0 cm, a menos de 1 mm por defeito, calcular um valor aproximado, por defeito, da área do triângulo, e achar um majorante do erro desse valor aproximado.

III. Determinar o número de algarismos exactos que se devem tomar no desenvolvimento de π para calcular a área dum círculo de 10 m de raio com erro inferior a 1 cm^2.

IV. Pretende-se construir um recipiente cilíndrico com 1 m de altura e 30 cm de raio da base. Avaliar o erro que pode provocar na capacidade do recipiente o erro de 1 mm cometido no raio da base e na altura.

V. Determinar a relação de grandeza que se verifica entre os números $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{3}$, aplicando o seguinte teorema:

'Sendo *a* e *b* números positivos e *n* um número natural, tem-se $a < b$, $a > b$ ou $a = b$, conforme $a^n < b^n$, $a^n > b^n$ ou $a^n = b^n$,

VI. Idem para os números $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ e $\sqrt{2}-1$.

VII. Dispor por ordem de grandeza os números 4, $\sqrt{13}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ sem recorrer a desenvolvimentos decimais.

VIII. Verificar que $\sqrt[3]{2-\sqrt{\pi}}$ está compreendido entre 0,6 e 0,7 (começando por calcular π a menos de 0,01).

12. **Majoração do erro de uma potência.** Seja x_1 valor aproximado de um número real x e seja *n* um número natural. Então, como se viu no 6.º ano,

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)\,(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x_1x^{n-2} + x^{n-1})$$

ou ainda, adoptando as notações anteriores para desvios:

$$(1) \qquad \Delta x^n = (x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \dots + x_1 x^{n-2} + x^{n-1})\, \Delta x,$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO DA POTÊNCIA.

Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$|\Delta x^n| \leqslant (|x_1|^{n-1} + |x_1|^{n-2}\,|x| + \dots + |x|^{n-1})\, \Delta x$$

Portanto, se designarmos por $\hat{x}$ um majorante qualquer de $|x_1|$ e $|x|$, virá:

$$\boxed{|\Delta x^n| \leqslant n\ \hat{x}^{n-1}\, |\Delta x|}$$

que é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA POTÊNCIA.

Esta permite não só majorar o erro da potência de um valor aproximado de x, como também resolver o problema inverso, de modo análogo ao que fizemos para o produto. Isto é:

Qualquer que seja $\delta > 0$, tem-se $|\Delta x^n| < \delta$, desde que seja $|\Delta x| < \varepsilon$, sendo ε um número positivo tal que

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{n\ \hat{x}^{n-1}} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon \leqslant \hat{x} - |x|\ ,$$

em que $\hat{x}$ é qualquer número maior que $|x|$.

Relativamente à fórmula (1), verifica-se, *na prática,* o seguinte facto:

Quando $|\Delta x|$ é bastante pequeno, o erro que se comete em substituir x_1 por x é *desprezável* e, assim, obtemos:

$$(1') \qquad \boxed{\Delta x^n \approx n\, x^{n-1}\, \Delta x}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA POTÊNCIA que, nas referidas circunstâncias, substitui a fórmula exacta (1). Veremos depois como, no CÁLCULO DIFERENCIAL, a própria fórmula (1') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo conceito de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

13. **Majoração do erro de uma raiz.** Sejam, agora, x e x_1 números reais *não negativos* e seja *n* um número natural. Pondo

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad \text{e} \qquad y_1 = \sqrt[n]{x_1}$$

tem-se:

$$y_1^n - y^n = (y_1 - y)\,(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$$

ou seja:

$$x_1 - x = (\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x_1})^{n-k-1}\,(\sqrt[n]{x})^k$$

Daqui, pondo

$$x_1 - x = \Delta x \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x} = \Delta \sqrt[n]{x} \ ,$$

vem, finalmente:

$$(1) \qquad \Delta \sqrt[n]{x} = \frac{\Delta x}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_1^{\frac{n-k-1}{n}} x^{\frac{k}{n}}}$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO DA RAIZ. Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$(2) \qquad | \Delta \sqrt[n]{x} | \leqslant \frac{1}{n\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}} |\Delta x| \ ,$$

sendo $\bar{x}$ um *minorante positivo de* x_1 *e* x, isto é, um número tal que $0 < \bar{x} < x_1$ e $\bar{x} < x$. Esta é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DA RAIZ, que permite não só majorar o erro da raiz de índice *n* de um valor aproximado de x como também resolver o problema inverso:

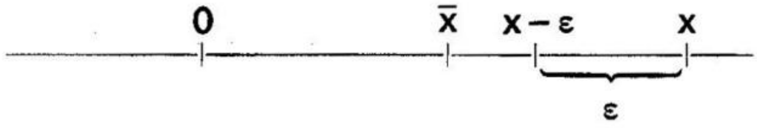
TEOREMA. *Qualquer que seja* $\delta > 0$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|x_1 - x| < \varepsilon \Rightarrow | \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x} | < \delta \qquad (\text{com } x \geqslant 0)$$

Um tal número ε *pode ser qualquer número positivo que verifique as duas condições:*

$$(3) \qquad \varepsilon \leqslant n \sqrt[n]{\bar{x}^{n-1}} \, . \, \delta \ , \quad \varepsilon < x - \bar{x}$$

sendo $\bar{x}$ *qualquer minorante positivo de* x.



Com efeito, seja $\bar{x}$ um minorante positivo de x e seja x_1 um valor aproximado de x a menos de ε, sendo ε um número que verifica as condições (3). Então, será:

$$x - \varepsilon < x_1$$

donde, por ser $\varepsilon < x - \bar{x}$

$$x - (x - \bar{x}) < x_1 \qquad \textit{(porquê?)}$$

ou seja $\bar{x} < x_1$. Por conseguinte, $\bar{x} < x_1$. Assim, $\bar{x}$ é um minorante positivo de x e x_1, o que permite aplicar a fórmula (2):

$$|\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}| \leqslant \frac{1}{n\,\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}}\,|x_1 - x|$$

Mas, $|x_1 - x| < \varepsilon \leqslant n\,\bar{x}^{\frac{n-1}{n}}\,\delta$, por hipótese. Logo

$$|\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x}| < \delta \quad , \quad \text{q. e. d.}$$

Relativamente à fórmula (1), observa-se o seguinte:

Na prática, quando $|\Delta x|$ é *bastante pequeno,* o erro que se comete em substituir x_1 por x é desprezável e, assim, obtemos:

$$\text{(1')} \qquad \boxed{\Delta \sqrt[n]{x} \approx \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

Esta é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ, que, nas referidas circunstâncias, substitui a fórmula exacta (1). Veremos também, como no CÁLCULO DIFERENCIAL, a fórmula (1') se torna exacta, substituindo o conceito de 'desvio' pelo de 'diferencial' (ou pelo de 'derivada').

14. **Desvio relativo e erro relativo.** Seja x um número real $\neq 0$ e seja x_1 um valor aproximado de x. Chama-se *desvio* relativo de x_1 (em relação a x) o quociente do desvio de x_1, (em relação a x) pelo próprio número x. Designaremos por $\Delta' x$ o desvio relativo de x_1 em relação a x. Será, pois, por definição:

$$\Delta' x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_1 - x}{x}$$

Chama-se *erro relativo de* x_1 *em relação a* x o módulo de $\Delta' x$(1).

Por exemplo, já sabemos que 3,14 é valor aproximado de π, por defeito, a menos de 0,01. Então, o erro relativo de 3,14 em relação a π será inferior a

$$\frac{0{,}01}{3} < 0{,}004$$

Também podemos dizer, neste caso, que o erro relativo é inferior a 4 ‰ (ou inferior a 0,4 %). Quanto ao desvio relativo de 3,14 em

(1) Também se chama *'desvio absoluto'* ao desvio propriamente dito, para o distinguir de desvio relativo, e *'erro absoluto'*, ao erro propriamente dito.

relação a π, esse será superior a $-0{,}004$, visto que $3{,}14 < \pi$ e portanto $3{,}14 - \pi < 0$.

EXERCÍCIOS — I. Sabendo que 23,08 é valor aproximado dum número α com erro relativo inferior a 1 %, indique os limites (majorante e minorante) que daí se deduzem para o número α.

II. Problema análogo, sabendo que $2{,}538 \times 10^7$ é valor aproximado dum número β com erro relativo inferior a 0,2 %.

15. **Erro relativo de um produto*.** Da fórmula do desvio do produto

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

deduz-se imediatamente, dividindo por xy:

$$\frac{\Delta(xy)}{xy} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

ou seja:

$$\Delta'(xy) = \Delta'x + \Delta'y + \Delta'x\Delta'y$$

que é a FÓRMULA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO.

Na prática, quando os erros relativos dos factores são suficientemente pequenos (p. ex. menores que 0,1), pode-se desprezar o produto desses erros e escrever:

$$(1) \qquad \Delta'(xy) \approx \Delta'x + \Delta'y$$

que é a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO. No CÁLCULO DIFERENCIAL, esta fórmula torna-se exacta, substituindo o conceito de 'desvio relativo' pelo conceito de 'diferencial relativo' (ou pelo de 'elasticidade'). De (1) deduz-se, por sua vez:

$$(2) \qquad |\Delta'(xy)| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y|$$

isto é:

Quando $|\Delta' x|$ *e* $|\Delta' y|$ *são bastante pequenos, o erro relativo do produto é inferior ou aproximadamente igual à soma dos erros relativos dos factores; e podemos dizer que é aproximadamente igual a essa soma, se os desvios dos factores tiverem o mesmo sinal*[1].

Por exemplo, se 0,27 e 3,5 são valores aproximados de dois números α e β com erros relativos inferiores a 1 %, podemos dizer que $0{,}27 \times 3{,}5$ é valor aproximado de $\alpha\beta$, com erro inferior ou aproximadamente igual a 2 %. Se o erro for superior a 2 %, a diferença (*erro de segunda ordem*) será inferior ao produto dos erros relativos dos factores e portanto inferior a 0,0001, o que é na verdade insignificante na prática.

16. **Erro relativo do quociente.*** Como vimos, a fórmula do desvio do quociente

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$$

---

(1) O sinal $\lesssim$ lê-se 'menor ou aproximadamente igual'.

pode ser substituída pela fórmula aproximada

$$(1) \qquad \Delta \frac{x}{y} \approx \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2}$$

quando $|\Delta y|$ é bastante pequeno em relação a $|y|$, isto é, *quando* $|\Delta' y|$ *é suficientemente pequeno.* Então de (1) deduz-se, dividindo por x/y:

$$(2) \qquad \Delta' \frac{x}{y} \approx \Delta' x - \Delta' y$$

Esta FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DO QUOCIENTE cede o lugar a uma fórmula exacta, quando se substituir o conceito de 'desvio relativo' pelo conceito de 'diferencial relativo' (ou pelo de 'elasticidade').

De (2) por sua vez deduz-se, na hipótese considerada

$$\left| \Delta' \frac{x}{y} \right| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y| \ ,$$

tendo-se

$$\left| \Delta' \frac{x}{y} \right| \approx |\Delta' x| + |\Delta' y| \ ,$$

quando $\Delta' x$ e $\Delta' y$ tiverem sinais contrários.

17. **Erros relativos da potência e da raiz.*** Por considerações semelhantes às dos números anteriores, chega-se às seguin-

tes FÓRMULAS APROXIMADAS DOS DESVIOS RELATIVOS DA POTÊNCIA E DA RAIZ:

$$\Delta' x^n \approx n\Delta' x$$

$$\Delta' \sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n} \Delta' x$$

que permitem fazer a majoração aproximada dos correspondentes erros relativos.

§ 2. TEORIA DOS LIMITES DE SUCESSÕES

18. **Métodos de aproximações sucessivas.** Suponhamos, por exemplo, que se pretende calcular a raiz quadrada de 2. Aplicando o processo de cálculo que foi aprendido (mas não justificado) no 1.º ciclo liceal, é possível determinar valores aproximados de $\sqrt{2}$ com a aproximação que se quiser: a menos de 0,1, de 0,01, de 10^{-6}, de 10^{-100}, etc. Mas é, evidentemente, impossível achar um *valor decimal exacto* de $\sqrt{2}$, visto que este número é irracional, portanto representável por uma dízima infinita não periódica.

Assim, podemos dizer que o referido processo de cálculo é um *método de aproximações sucessivas.* Além disso, é um *método de tentativas sistemáticas,* pois que, como todos sabemos, é preciso muitas vezes experimentar mais de um algarismo, antes de acertar no que convém.

Aliás, o processo habitual da divisão também é um *método de tentativas sistemáticas,* pela mesma razão e, quando não conduz nunca a resto zero, pode considerar-se um *método de aproximações sucessivas,* com uma diferença, em relação ao sistema anterior: é que o quociente é representado por uma *dízima infinita periódica,* quando o dividendo e o divisor são números racionais.

Vamos, agora, estudar um outro método de aproximações sucessivas para o cálculo de raízes quadradas. Este método, como veremos, apresenta diversas vantagens, que o tornam mais aconselhável do que o anterior, *especialmente quando se recorre a computadores.*

Seja *a* o número cuja raiz quadrada se pretende calcular (supomos, é claro, $a > 0$) e seja x_1 um número tal que

$$x_1^2 > a$$

Este número pode sempre ser determinado por tentativas, de modo que x_1^2 *não seja muito maior do que* a. Teremos então

$$x_1 > \sqrt{a}$$

e, deste modo, x_1 pode ser tomado *como primeiro valor aproximado de* $\sqrt{a}$ (por excesso). Para obter uma segunda aproximação, ponhamos $a_1 = x_1^2$ e notemos que se tem, pela FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ, dada no n.º 13, (1'), pág. 46 [1]:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a_1} \approx \frac{a - a_1}{2\sqrt{a_1}}$$

Daqui, lembrando que $\sqrt{a_1} = x_1$ e que $x_1^2 > a$, vem:

$$\sqrt{a} \approx x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

Ponhamos, então:

$$(1) \qquad x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - a}{2x_1}$$

---

(1) Agora temos $n = 2$, a_1 em vez de x e a em vez de x_1.

ou seja:

$$(2) \qquad x_2 = \frac{x_1^2 + a}{2x_1}$$

De (1) deduz-se que $x_2 < x_1$ *(porquê?)*. De (2) vem:

$$x_2 - \sqrt{a} = \frac{x_1^2 + a - 2x_1\sqrt{a}}{2x_1} = \frac{(x_1 - \sqrt{a})^2}{2x_1} > 0$$

Por conseguinte

$$\sqrt{a} < x_2 < x_1$$

Assim, podemos tomar x_2 como *segundo valor aproximado de* $\sqrt{a}$. Se pusermos agora

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - a}{2x_2}$$

podemos desde já concluir, pelas razões anteriores (com x_2 no lugar de x_1 e x_3 no lugar de x_2) que

$$\sqrt{a} < x_3 < x_2 ,$$

o que nos leva a tomar x_3 como *terceiro valor aproximado de* $\sqrt{a}$. Deste modo, se pusermos em geral:

$$(3) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

fica definida uma *sucessão de valores aproximados de* $\sqrt{a}$ tal que

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots > \sqrt{a}$$

Trata-se, pois, de uma *sucessão decrescente* (cada termo é superior ao seguinte) e *limitada inferiormente* (todos os termos são superiores a $\sqrt{a}$)([1]). A fórmula (3) é chamada uma *fórmula de recorrência,* porque permite calcular cada termo da sucessão, depois do primeiro, a partir do termo anterior: essa fórmula define pois a sucessão, uma vez dado o primeiro termo x_1 (com a condição $x_1^2 > a$).

Notemos, agora, que a parte inteira dos números x_n não pode diminuir indefinidamente, visto que esses números são todos maiores que $\sqrt{a}$. *Portanto, a parte inteira dos números* x_n *estabiliza-se (isto é, passa a ser sempre a mesma) a partir de certa ordem* n_1.

Por sua vez, a partir desta ordem n_1, o algarismo das décimas dos números x_n não pode aumentar *(porquê?)* e também não pode diminuir indefinidamente *(porquê?). Logo, o algarismo das décimas dos números* x_n *estabiliza-se a partir de certa ordem* $n_2 \geqslant n_1$.

E analogamente para as centésimas, para as milésimas, etc.

Seja x o número representado pela dízima que se obtém deste modo, por estabilização sucessiva da parte inteira e dos algarismos decimais dos valores aproximados x_n. *Vamos ver intuitivamente que* $x = \sqrt{a}$.

Seja, por exemplo, r a ordem a partir da qual se estabilizaram os algarismos das milésimas. Tem-se então, dentro dessa aproximação

$$x \approx x_n \quad \text{para} \quad n \geqslant r$$

([1]) As definições de 'sucessão crescente', 'sucessão limitada', etc. serão formuladas mais adiante. Basta, por enquanto, a *noção intuitiva*.

Isto permite escrever, em vez da fórmula (3):

$$x \approx x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

o que equivale a $x^2 - a \approx 0$ ou ainda a $x \approx \sqrt{a}$ por ser $x > 0$. E, como o erro da aproximação é *tão pequeno quanto se queira,* será exactamente $x = \sqrt{a}$.

Veremos, depois, como a teoria dos limites permite demonstrar rigorosamente este facto.

Vejamos, agora, como o método anterior se generaliza ao cálculo de raízes de índice *p* qualquer ($p \in \mathbb{N}$). Seja *a* um número positivo cuja raiz de índice p se pretende calcular e tomemos x_1 de modo que seja $x_1^p > a$. Então, pondo $x_1^p = a_1$, vem, pela *fórmula aproximada do desvio:*

$$\sqrt[p]{a} - \sqrt[p]{a_1} \approx \frac{a - a_1}{p\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}$$

ou seja:

$$\sqrt[p]{a} \approx x_1 - \frac{x_1^p - a}{p\,x_1^{p-1}}$$

Isto conduz-nos à *fórmula de recorrência:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p - a}{px_n^{p-1}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prova-se, então, que

$$\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e que os números x_n são valores aproximados de $\sqrt[p]{a}$, com *erro tão pequeno quanto se queira.*

Mais tarde se verá como este método se pode generalizar ao cálculo de raízes reais de equações algébricas ou transcendentes, com a designação de *método de Newton* ou *método da tangente.*

EXEMPLOS NUMÉRICOS:

I. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt{2}$ pelo método de Newton. Devemos então começar por escolher um número x_1 tal que $x_1^2 > 2$. Poderá ser $x_1 = 1{,}5$; tem-se, com efeito, $1{,}5^2 = 2{,}25$. A segunda aproximação será, neste caso:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} \approx 1{,}417$$

Como $x_2 < 1{,}42$, tem-se $\sqrt{2} < 1{,}417$ e podemos tomar

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1{,}417 - \frac{0{,}007889}{2{,}834} \approx 1{,}4143$$

continuando a *aproximar por excesso*. Podemos, pois, tomar agora

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 2}{2x_3} \approx 1{,}4143 - \frac{0{,}0002449}{2{,}8286} \approx 1{,}41421357$$

e assim sucessivamente. A aproximação seguinte mostra, por estabilização, que este valor é aproximado por excesso a menos de 10^{-8}. Tem-se, pois, até essa ordem decimal:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

Vê-se que este método é mais expedito que o método usual, sobretudo quando se trabalha com uma máquina de calcular: o número de algarismos exactos tende a duplicar em cada aproximação.

II. Suponhamos, agora, que se trata de calcular $\sqrt[5]{23}$ pelo método de Newton. Como se tem $2^5 = 32 > 23$, podemos tomar 2 como primeiro valor aproximado de $\sqrt[5]{23}$. A partir deste, podemos depois calcular sucessivos valores aproximados de $\sqrt[5]{23}$ aplicando a fórmula de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 23}{5x_n^4}$$

Mas os cálculos são agora mais laboriosos, tornando-se para isso aconselhável recorrer a um computador. Os valores aproximados que a seguir apresentamos foram calculados por meio do computador electrónico que se encontra ao serviço do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1{,}88750001$$
$$x_3 = 1{,}87241820$$
$$x_4 = 1{,}87217129$$
$$x_5 = 1{,}8721712$$

O programa para este cálculo foi escolhido de modo a dar as seguintes ordens ao computador: 1) fornecer sucessivos valores aproximados de $\sqrt[5]{23}$, segundo o método de Newton, partindo de $x_1 = 2$ (com 8 algarismos decimais); 2) terminar no valor aproximado que tiver 7 decimais exactos, ou seja com erro inferior a 10^{-7} (1).

Será, pois:

$$\sqrt[5]{23} = 1{,}821712 \quad , \quad \text{a menos de } 10^{-7} \text{ (por defeito)}$$

O computador poderia, também, ter recebido ordem para fornecer directamente este valor, sem dar os anteriores. Em qualquer dos casos o tempo de cálculo no computador utilizado é praticamente nulo: da ordem dos mili-segundos.

Estes cálculos foram amavelmente dirigidos pela matemática do L. N. E. C., Senhora Dr.ª D. Madalena Quirino, a quem por esse facto deixamos aqui expressos os nossos vivos agradecimentos.

19. **Convergência de uma sucessão.** No número anterior, vimos como, dado um número positivo *a*, é possível achar sucessivos valores aproximados de $\sqrt{a}$:

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots$$

com erro *tão pequeno quanto se queira.* Mais precisamente, vimos que, por menor que seja um número positivo δ, existe uma ordem r, depois da qual *todos* os números x_n são valores aproximados de $\sqrt{a}$ a menos de δ, isto é, tal que:

$$n > r \Rightarrow |x_n - \sqrt{a}| < \delta.$$

---

(1) Chamamos 'algarismos decimais' aos algarismos da *parte decimal.*

Este facto pode ser traduzido pela fórmula:

$$\forall \delta > 0, \quad \exists r \in \mathbb{N}: \quad n > r \underset{n}{\Rightarrow} |x_n - \sqrt{a}\,| < \delta$$

(E analogamente para $\sqrt[p]{a}$, com qualquer $p \in \mathbb{N}$.)

Pois bem, exprime-se este facto dizendo que a sucessão x_n *tende para* $\sqrt{a}$ (ou *converge para* $\sqrt{a}$) e escrevendo

$$x_n \rightarrow \sqrt{a}$$

Assim, no 1.º exemplo do número anterior, calculámos cinco termos

$$1{,}5; \quad 1{,}417; \quad 1{,}4143; \quad 1{,}41421357; \quad \ldots$$

de uma sucessão que converge, rapidamente, para $\sqrt{2}$. Podemos mesmo dizer que esta sucessão *converge cada vez mais rapidamente*, porque, como vimos, o número de algarismos exactos (estabilizados) tende a duplicar em cada aproximação efectuada ([1]).

Dum modo geral:

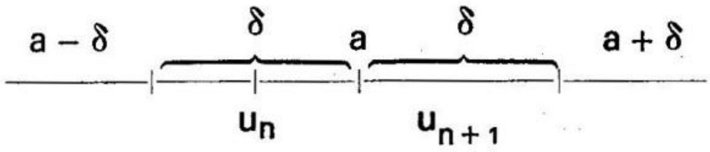
DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma sucessão $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de números reais *tende* (ou *converge*) para um número real *a*, sse, para todo o número $\delta > 0$, existe uma ordem r depois da qual *todos* os termos da sucessão são valores aproximados de *a* a menos de δ. Escreve-se então:

$$u_n \rightarrow a \quad (\text{ler: } u_n \textit{ tende para } a)$$

([1]) No 2.º exemplo foram calculados quatro termos duma sucessão que converge rapidamente para $\sqrt[5]{23}$.

Portanto, a expressão $u_n \to a$ equivale, *por definição*, à seguinte:

$$\forall \delta > 0,\ \exists r \in \mathbb{N}:\ n > r \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \delta$$



Note-se ainda: dizer que u_n é valor aproximado de *a* a menos de δ, quando $n > r$, equivale a dizer que u_n *está na vizinhança* (δ) *de* a, *quando* $n > r$ *(porquê? Que significa vizinhança* (δ) *de* a?*)*.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que uma sucessão de números reais é *convergente,* sse tende para um número real. Caso contrário diz-se que a sucessão é *divergente.*

EXEMPLOS:

I. Seja $u_n = (-1)^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$u_1 = -1 \quad , \quad u_2 = 1 \quad , \quad u_3 = -1 \quad , \quad u_4 = 1 \quad , \quad \ldots$$

e a sucessão $-1, 1, -1, 1, \ldots$ assim definida é *divergente,* isto é, não tende para número nenhum. Com efeito, suponhamos que u_n tendia para um número *a* e tomemos por exemplo $\delta = 0{,}5$. Então existia uma ordem r tal que

$$|u_n - a| < 0{,}5$$

para todo o $n > r$. Mas, depois da ordem r, há sempre termos iguais a 1 e termos iguais a -1.

$$\begin{array}{ccccc} a-\delta & & & & a+\delta \\ \hline & -1 & a & 1 & \end{array}$$

Portanto, os números 1 e -1 teriam de estar na vizinhança (0,5) de a, isto é, deveria ser:

$$a - 0{,}5 < -1 < 1 < a + 0{,}5$$

donde:

$$1 - (-1) < (a + 0{,}5) - (a - 0{,}5) \qquad \textit{(porquê?)}$$

ou seja: $2 < 1$, o que é absurdo. Logo, u_n não tende para nenhum número *a:* a sucessão é, pois, divergente.

II. Provar que a sucessão dos números naturais ($u_n = n$), a sucessão das potências de 10 ($u_n = 10^n$) e a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n n$ são todas divergentes[1].

III. Consideremos, agora, a sucessão dos inversos dos números naturais:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

---

[1] Por redução ao absurdo, como no caso anterior. É preciso lembrar que, *qualquer que seja $\alpha \in R$, todos os números naturais superiores à característica de α são maiores que α.*

Esta sucessão é convergente: *tende para zero*. Com efeito, seja δ *qualquer* número positivo (por exemplo $\delta = 3$, $\delta = 0{,}001$, $\delta = 10^{-6}$, $\delta = 10^{-100}$, etc.). Trata-se de provar que se tem, a partir de certa ordem

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \delta$$

Como o primeiro membro é igual a $1/n$ *(porquê?), tudo se reduz a resolver a inequação* $1/n < \delta$ *em ordem a* n. Tem-se, então:

$$(1) \qquad \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Seja, agora, r um número natural *igual ou superior* a $1/\delta$. Então $n > r \Rightarrow n > 1/\delta$ e de (1) vem:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{n} < \delta$$

Por exemplo, seja $\delta = 0{,}003$. Neste caso, $1/\delta = 1000/3$ e um número natural $\geqslant 1/\delta$ será, por exemplo, $r = 334$. Portanto

$$n > 334 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0{,}003$$

isto é: *depois da ordem* 334, *todos os termos da sucessão são menores que* 0,003. E analogamente noutros casos.

Em resumo:

$$\forall \delta, \exists r : n > r \underset{n}{\Rightarrow} \frac{1}{n} < \delta$$

o que significa precisamente que $1/n \to 0$.

(Quando $u_n \to 0$ diz-se que u_n é um *infinitésimo*.)

IV. Escreva os seis primeiros termos das sucessões definidas pelas expressões:

$$\frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{1}{10^n}, \quad \frac{(-1)^n}{10^n}$$

e mostre que qualquer destas sucessões tende para zero.

V. Seja, agora, a sucessão

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

em que cada termo, a partir do segundo, se obtém adicionando 1 ao numerador e ao denomiandor da fracção que representa o termo anterior. Os números assim obtidos são cada vez maiores (*sucessão crescente*), mas são todas inferiores a 1 (*sucessão limitada*), visto serem representados por fracções próprias. *Vamos provar que esta sucessão tende para* 1. Tem-se, com efeito:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = 1 - \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textit{(porquê?)}$$

$$= \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seja, agora, δ um número positivo qualquer. Então

$$\frac{1}{n+1} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} - 1$$

Portanto, se r for um número natural $\geqslant \frac{1}{\delta} - 1$, tem-se:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \delta$$

Assim

$$\forall \delta > 0, \ \exists r \in \mathbb{N}: \ n > r \underset{n}{\Rightarrow} \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \delta$$

o que significa que $\frac{n}{n+1} \to 1$. Para ter uma visão intuitiva deste facto, convém ver a figura do *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pág. 162.

Note-se que a convergência desta sucessão é muito lenta: por exemplo, só a partir do termo de ordem 99 *se obtêm valores aproximados de* 1 *a menos de* 0,01.

VI. Analogamente se reconhece que a sucessão

$$2, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \frac{5}{4}, \ \ldots, \ \frac{n+1}{n}, \ \ldots$$

converge para 1. Mas, enquanto a anterior *tende para* 1 *por valores* *menores que* 1, *esta tende para* 1 *por valores maiores que* 1. Exprimem-se estes factos, escrevendo, respectivamente,

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1^- \quad , \quad \frac{n+1}{n} \rightarrow 1^+$$

VII. Por sua vez, a sucessão

$$0, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \dots, \quad \frac{(-1)^n + n}{n}, \quad \dots$$

tende para 1, como é fácil verificar, *mas por valores alternadamente inferiores e superiores a* 1 (ver a fig. 2 do *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pág. 163).

VIII. Dadas as sucessões:

$$1{,}8;\ 1{,}98;\ 1{,}998;\ 1{,}9998;\ \dots;\ 2 - \frac{2}{10^n}\ ;\ \dots$$

$$2{,}2;\ 2{,}02;\ 2{,}002;\ 2{,}0002;\ \dots;\ 2 + \frac{2}{10^n}\ ;\ \dots$$

$$1{,}8;\ 2{,}02;\ 1{,}998;\ 2{,}0002;\ \dots;\ 2 + (-1)^n \frac{2}{10^n}\ ;\ \dots$$

verificar: a) se são convergentes; b) para que números tendem; c) de que modo convergem. Comparar a rapidez de convergência destas sucessões com a das sucessões anteriores.

20. **Pormenores de terminologia.** O conceito de 'sucessão' foi apresentado já no 2.º ciclo. *Dar* (ou *definir) uma sucessão de*

números reais equivale a dar um processo qualquer, pelo qual, a cada número natural n, fique a corresponder um determinado número real u_n. Neste caso, u_1 é o *primeiro termo* da sucessão, u_2 o *segundo termo* da sucessão, etc.; u_n é o *termo da ordem* n (ou *termo geral*) da sucessão. Deste modo, a variável u_n representa uma *função real* da *variável natural* n ou seja uma *aplicação*

$$n \curvearrowright u_n \text{ de } \mathbb{N} \text{ em } \mathbb{R}$$

E é precisamente esta aplicação (ou função) que se chama 'sucessão de números reais'. Tal aplicação é normalmente chamada *'a sucessão de termo geral* u_n, ou, simplesmente, a *'sucessão* u_n'. Em vez da notação u_n, podem também usar-se notações tais como $u(n)$, $f(n)$, $\varphi(n)$, ..., que se empregam habitualmente a respeito de funções em geral (isto é, escrevendo a variável independente *n* entre parênteses, a seguir ao símbolo da função, em vez de pôr essa variável como índice).

Como qualquer outra função, uma sucessão pode, em muitos casos, ser definida por uma expressão designatória (chamada, neste caso, *'expressão do termo geral'*), como se verifica nos exemplos anteriores. Mas também se define muitas vezes uma sucessão por um processo de recorrência, de que vimos alguns exemplos no n.º 18, ao tratar do método de Newton para extracções de raízes. Mais tarde trataremos, em pormenor, de métodos de recorrência.

Dum modo geral, dado um conjunto A qualquer, chama-se *sucessão de elementos de* A toda a aplicação $n \curvearrowright u_n$ de $\mathbb{N}$ em A. Por exemplo, a expressão i^n define uma sucessão de números complexos:

$$i, \; -1, \; -i, \; 1, \; i, \; -1, \; -i, \; 1, \; i, \; \dots$$

Como se vê, o conceito de sucessão é uma extensão do conceito de sequência. Poderíamos chamar '*sucessões finitas*' às sequências. Por exemplo, a sequência de 5 números complexos

$$i, \; -1, \; -i, \; 1, \; i$$

é uma aplicação do conjunto 1, 2, 3, 4, 5 no conjunto $\mathbb{C}$. É só por comodidade e para evitar equívocos que reservamos o termo 'sequência' para as sucessões finitas.

Tornemos, agora, às sucessões de números reais. Muitas vezes, em vez de dizer '*a sucessão* u_n *tende para* a' diz-se '*a variável* u_n *tende para* a'. Trata-se de um abuso de linguagem, pois, como vimos, uma sucessão não é uma variável, mas sim uma aplicação (isto é, uma determinada correspondência). Mas, trata-se de um abuso de linguagem *cómodo e sugestivo,* que não tem inconvenientes, desde que o aluno esteja advertido sobre o facto, de modo a evitar possíveis equívocos.

A propósito do exemplo III do número anterior, introduziu-se a seguinte

DEFINIÇÃO. Diz-se que u_n é um *infinitésimo,* sse $u_n \to 0$.

Também se diz neste caso que u_n é um *infinitamente pequeno.*

Da definição 1 do número anterior deduz-se imediatamente o seguinte facto:

$$u_n \to a \Leftrightarrow u_n - a \to 0$$

Isto é: *dizer que* u_n *tende para* a *equivale a dizer que* $u_n - a$ *é um infinitésimo*.

NOTA IMPORTANTE. Em questões de física e de outras ciências experimentais, a expressão 'infinitamente pequeno' (ou 'infinitésimo') é usada para designar uma *grandeza praticamente nula*, isto é, de tal modo pequena (em valor absoluto) que pode ser desprezada na questão de que se trata. Também no CÁLCULO NUMÉRICO APROXIMADO, que introduzimos no capítulo I, os erros desprezáveis (por exemplo no cálculo de um produto) podem ser chamados infinitésimos.

Este significado prático da palavra 'infinitésimo' corresponde, de certo modo, à noção intuitiva de 'infinitésimo' que tinham os matemáticos nos primórdios do CÁLCULO INFINITESIMAL: *um infinitésimo (positivo) seria, então, uma grandeza menor que qualquer submúltiplo da unidade e, contudo, maior que zero.* Mas, segundo o conceito usual de grandeza, um infinitésimo deveria ter, nesse caso, a seguinte propriedade:

'Ser nulo e não ser nulo ao mesmo tempo'

o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO; ou então não ser uma coisa nem outra, isto é:

'Estar numa situação intermédia entre ser nulo e não ser nulo'

o que é impossível, segundo o PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO.

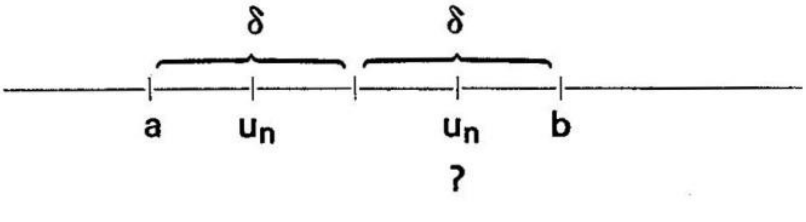
Por exemplo, se dividirmos um segmento com um metro de comprimento em 2 partes iguais, em 4 partes iguais, em 8 partes iguais, e assim sucessiva e indefinitamente, obtemos segmentos cada vez mais pequenos, cujos comprimentos *tendem para zero.* Ora, segundo os referidos matemáticos, esses segmentos não tenderiam propriamente para segmentos nulos, *mas sim para segmentos* *infinitésimos*. Estes segmentos infinitésimos seriam em número infinito e a sua soma daria o segmento inicial (se fossem efectivamente nulos, a sua soma também teria de ser nula).

Assim, os infinitésimos eram concebidos como quantidades fixas (chamadas 'indivisíveis' ou 'infinitésimos actuais') e não como variáveis, ou ainda, como *sucessões que tendem para zero* (segundo a definição anterior). Mas, já vimos que o conceito de infinitésimo actual é contraditório.

Note-se que o anterior exemplo das divisões sucessivas de um segmento em partes iguais está na base dos PARADOXOS DE ZENÃO e, nomeadamente, do *paradoxo da seta* (ver no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, a 'Nota Histórica' do Cap. IV).

21. **Primeiros teoremas sobre limites.** Quando uma sucessão u_n tende para um número *a*, também se diz que *a* é *limite* da sucessão. Tem-se, porém, a seguinte propriedade:

TEOREMA 1 (DA UNICIDADE DO LIMITE). *Uma sucessão não pode tender para dois números diferentes.*



Demonstração (por redução ao absurdo):

Suponhamos que existe uma sucessão u_n que tende ao mesmo tempo para dois números a, b diferentes e seja, por exemplo, $a < b$.

Ponhamos

$$\delta = \frac{b-a}{2}$$

Então δ é um número positivo *(porquê?)* e tem-se:

$$2\delta = b - a$$

donde:

$$(1) \qquad a + \delta = b - \delta$$

Ora, como $u_n \to a$ e $u_n \to b$, existem uma ordem r e uma ordem s tais que

$$(2) \qquad \begin{cases} n > r \Rightarrow a - \delta < u_n < a + \delta \\ n > s \Rightarrow b - \delta < u_n < b + \delta \end{cases}$$

Designemos por p o maior dos números r, s. Então de (2) deduz-se:

$$n > p \Rightarrow u_n < a + \delta \wedge u_n > b - \delta$$

Mas isto, segundo (1), é absurdo: u_n não pode ser ao mesmo tempo *menor* que $a + \delta$ e *maior* que $a + \delta$ *(porquê?)*. Logo, u_n não pode tender ao mesmo tempo para *a* e *b*.

Assim, quando uma sucessão é convergente, o seu limite existe e é único. Pois bem:

Representa-se pelo símbolo $\lim u_n$ o limite duma sucessão convergente, isto é, tem-se, por definição:

$$\boxed{a = \lim u_n \Leftrightarrow u_n \to a}$$

Vamos, agora, estudar um caso particular de convergência. Suponhamos, por exemplo, que certo método de aproximações sucessivas fornece a sucessão:

$$5{,}83; \quad 5{,}94; \quad 5{,}99; \quad 6; \quad 6; \quad 6; \quad 6; \quad \ldots$$

em que todos os termos, a partir do quarto, são iguais a 6. Então, se designarmos por u_n o termo geral da sucessão, tem-se, evidentemente:

$$\forall \delta > 0 : n > 3 \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - 6| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por conseguinte, $u_n \to 6$.

No caso geral, demonstra-se, de modo análogo, o seguinte:

TEOREMA 2. *Se todos os termos de uma sucessão, a partir de uma certa ordem, são iguais a um mesmo número* c, *a sucessão tem por limite esse número* c.

Em particular, pode acontecer que todos os termos de uma sucessão u_n sejam iguais a *c* (logo a partir do primeiro), isto é, que se tenha

$$u_n = c \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diz-se, neste caso, que a sucessão é *constante* e podemos escrever

$$\boxed{\lim c = c}$$

o que se exprime habitualmente dizendo (por abuso de linguagem):

'O limite de uma constante é a própria constante'

Finalmente, o teorema 2 do n.º 6 dá o seguinte

TEOREMA 3. *Se* $u_n \to a$, *então* $|u_n| \to |a|$.

22. **Álgebra dos limites.** Os teoremas de cálculo aproximado da soma, do produto, do quociente e da raiz, estudados no § 1, fornecem outros tantos teoremas sobre limites.

Comece por rever o teorema n.º 5. Desse teorema deduz-se facilmente o seguinte

TEOREMA DO LIMITE DA SOMA. *A soma de duas sucessões* *convergentes,* u_n *e* v_n*, é também uma sucessão convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$u_n \to a \quad \text{e} \quad v_n \to b \qquad (\text{com } a, b \in \mathbb{R})$$

e seja δ um número positivo *qualquer*. Então, $\delta/2$ também é um número positivo e, portanto, existem uma ordem r e uma ordem s, tais que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \quad , \quad n > s \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Assim, se designarmos por p *o maior dos números* r, s, teremos:

$$n > p \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2} \wedge |v_n - b| < \frac{\delta}{2}$$

Ora, segundo o teorema do n.º 5, sendo u_n e v_n valores aproximados de *a* e *b*, a menos de $\delta/2$, a sua soma, $u_n + v_n$, será valor aproximado de $a + b$ a menos de δ. Por conseguinte:

$$n > p \Rightarrow |(u_n + v_n) - (a + b)| < \delta$$

E, como δ pode ser *qualquer* número positivo, isto significa que

$$\lim\ (u_n + v_n) = a + b = \lim\ u_n + \lim\ v_n$$

Este teorema é, evidentemente, generalizável ao caso de uma soma com um número qualquer (finito) de parcelas. Por exemplo, tratando-se de três sucessões u_n, v_n, w_n convergentes, virá, aplicando duas vezes o teorema anterior:

$$\lim\ (u_n + v_n + w_n) = \lim \left[(u_n + v_n) + w_n\right] = \lim\ (u_n + v_n) + \lim w_n =$$

$$= \lim u_n + \lim v_n + \lim w_n$$

E analogamente para 4 parcelas, 5 parcelas, etc. Podemos resumir estas conclusões no seguinte enunciado geral:

A soma de duas ou mais sucessões convergentes é sempre uma sucessão convergente, que tem por limite a soma dos limites das parcelas.

Reveja, agora, o teorema do n.º 9. Dele se deduz:

TEOREMA DO LIMITE DO PRODUTO. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes,* $u_n \cdot v_n$ *também é sucessão convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim\ (u_n v_n) = \lim\ u_n \cdot \lim\ v_n}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$(1) \qquad u_n \to a \quad e \quad v_n \to b \qquad (\text{com } a, b \in \mathbb{R})$$

e seja δ um número positivo *qualquer*. Segundo o teorema do n.º 9, existe um número positivo ε tal que, se u_n e v_n forem valores aproximados de *a* e de *b* a menos de ε, então $u_n v_n$ é valor aproximado de ab a menos de δ; isto é, simbolicamente:

$$(2) \qquad |u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon \Rightarrow |u_n v_n - ab| < \delta$$

Por outro lado, em virtude de (1), existem uma ordem r e uma ordem s tais que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \quad , \quad n > s \Rightarrow |v_n - b| < \varepsilon$$

Deste modo, sendo p o maior dos números r, s, vem:

$$n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon$$

donde, atendendo a (2):

$$n > p \Rightarrow |u_n \; v_n - ab| < \delta$$

E, como δ é um número positivo *qualquer,* isto significa que

$$\lim \; u_n v_n = ab = \lim \; u_n \cdot \lim \; v_n, \qquad \text{q. e. d.}$$

Este teorema pode ainda generalizar-se ao caso de um número qualquer (finito) de factores, como se fez para a soma. Assim, podemos afirmar que:

O produto de duas ou mais sucessões convergentes ainda é uma sucessão convergente, que tem por limite o produto dos limites dos factores.

COROLÁRIO I. *Se* u_n *é convergente e* p *é um número natural qualquer (constante), tem-se:*

$$\boxed{\lim u_n^p = (\lim u_n)^p}$$

Com efeito, tem-se, por definição de potência:

$$u_n^p = u_n\, u_n \ldots u_n \quad \text{(p vezes)}$$

e, aplicando o teorema anterior, vem (sendo u_n convergente):

$$\lim u_n^p = \underbrace{(\lim u_n)\,(\lim u_n)\,\ldots\,(\lim u_n)}_{\text{p vezes}} = (\lim u_n)^p$$

COROLÁRIO II. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes, tem-se:*

$$\boxed{\lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n}$$

Basta notar que $u_n - v_n = u_n + (-1)v_n$, donde, aplicando os teoremas anteriores,

$$\lim (u_n - v_n) = \lim u_n + \lim (-1) \lim v_n = \lim u_n - \lim v_n$$

TEOREMA DO LIMITE DO QUOCIENTE. *Se* u_n *e* v_n *são sucessões convergentes e* $\lim v_n \neq 0$, *também* u_n/v_n *é convergente e tem-se:*

$$\boxed{\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}} \qquad (\text{supondo } v_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

Por outros termos:

O quociente de duas sucessões convergentes também é uma sucessão convergente, desde que o divisor nunca seja zero nem tenda para zero. Neste caso, o limite do quociente é igual ao quociente do limite do dividendo pelo limite do divisor.

A demonstração, baseada no teorema do n.º 11, é perfeitamente análoga à que foi dada para o teorema do produto e pode ser feita como exercício pelo aluno.

TEOREMA DO LIMITE DA RAIZ. *Sendo* p *um número natural e* u_n *uma sucessão convergente, também* $\sqrt[p]{u_n}$ *é convergente (supondo que é sempre* $u_n \geqslant 0$, *se* p *é par). Tem-se, então:*

$$\boxed{\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}}$$

Demonstração:

Bastará considerar o caso em que $u_n \geqslant 0$ para todo o *n*, pois que, se for $u_n < 0$ (com p ímpar), tem-se $\sqrt[p]{u_n} = -\sqrt[p]{|u_n|}$ e ficamos reduzidos ao caso anterior. Suponhamos, pois, que

$$(3) \qquad u_n \to a \quad , \quad \text{com } a \geqslant 0 \quad \text{e} \quad u_n \geqslant 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja δ um número positivo *qualquer*. Então, segundo o teorema do n.º 13, existe um número $\varepsilon > 0$, tal que

$$|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| < \delta$$

Por outro lado, segundo (3), existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Logo

$$n > r \Rightarrow |\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| < \delta,$$

o que significa que $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim u_n}$.

23. **Métodos de iteração.** Consideremos uma equação da forma

$$f(x) = x,$$

em que f é uma função dada. Procurando resolver esta equação por tentativas, podemos adoptar um número x_1 como valor aproximado da solução. Seja x_2 o valor de $f(x_1)$, isto é:

$$f(x_1) = x_2$$

Se fosse $x_2 = x_1$, então x_1 seria, de facto, solução. Mas, em geral, isto não sucede. Ponhamos, sucessivamente:

$$f(x_2) = x_3 \quad , \quad f(x_3) = x_4 \quad , \quad \ldots$$

e, em geral,

$$(1) \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta *fórmula de recorrência,* juntamente com o valor inicial x_1, escolhido arbitrariamente, define uma sucessão x_n. Suponhamos, agora, que são verificadas as duas seguintes condições:

1) a sucessão x_n é convergente;

2) $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Seja c o limite de x_n. Então c será também o limite da sucessão x_{n+1} (cujo 1.º termo é x_2, cujo 2.º termo é x_3, etc.). Com efeito, sendo δ um número positivo arbitrário, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |x_n - c| < \delta \qquad \text{(visto que } x_n \rightarrow c\text{)}$$

Mas, daqui resulta que

$$n > r \Rightarrow |x_{n+1} - c| < \delta \qquad \text{e, portanto, } x_{n+1} \rightarrow c$$

Assim, de (1) virá, atendendo à condição 2):

$$\lim x_{n+1} = f(\lim x_n)$$

ou seja:

$$c = f(c)$$

o que significa, precisamente, que o número *c* é solução da equação $f(x) = x$. A sucessão x_n fornece, pois, valores aproximados desta solução, com a aproximação que se queira.

O método geral de aproximações sucessivas que acabamos de descrever é chamado *método de iteração* ('iterar' significa 'repetir') e a função f é chamada *função iterante*. Os métodos de iteração (quando aplicáveis) prestam-se muito para o cálculo de raízes de equações por meio de computadores.

O método de Newton, que foi descrito em pormenor no n.º 18, no caso particular da radiciação, é exemplo típico dum método de iteração. Por exemplo, calcular $\sqrt{a}$, com $a > 0$, é calcular a raiz positiva da equação $x^2 = a$. Ora, tem-se, como é fácil ver:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = x - \frac{x^2 - a}{2x} \quad , \quad \forall x > 0$$

Assim, a equação $x^2 = a$ é posta sob a forma $x = f(x)$, sendo

$$f(x) \equiv x - \frac{x^2 - a}{2x} \quad \text{(função iterante).}$$

Como vimos, se escolhermos x_1 de modo que $x_1^2 > a$, a sucessão x_n, obtida pela fórmula de recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$, é convergente. Por outro lado, aplicando os teoremas anteriores, vem neste caso:

$$\lim f(x_n) = \lim x_n - \frac{(\lim x_n)^2 - a}{2 \lim x_n} = f(\lim x_n) \qquad \textit{(justifique)}$$

São, portanto, verificadas as condições 1) e 2) anteriores, o que garante que x_n tende, efectivamente, para uma raiz da equação $x^2 = a$: a raiz positiva ou seja $\sqrt{a}$.

24. **Critérios particulares de convergência.** Diz-se que uma sucessão u_n é *crescente*, quando cada um dos termos é menor do que o seguinte, isto é, quando $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. É claro que esta condição equivale a esta outra:

$$n < m \Rightarrow u_n < u_m$$

Diz-se que uma sucessão u_n é *decrescente*, quando cada um dos seus termos é maior que o seguinte (e, portanto, maior que todos os seguintes).

Uma sucessão u_n diz-se *monótona*, sse é crescente ou é decrescente.

Diz-se que u_n é *crescente em sentido lato*, quando se tem $u_n \leqslant u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Analogamente se define '*sucessão decrescente em sentido lato*' e ainda '*sucessão monótona em sentido lato*'.

Uma sucessão u_n diz-se *limitada*, quando todos os seus termos têm módulo inferior a um certo número; isto é, sse existe algum número L tal que

$$|u_n| < L \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Para exemplos, ver *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pp. 148-149.)

CRITÉRIO DAS SUCESSÕES MONÓTONAS. *Toda a sucessão limitada que seja monótona (mesmo em sentido lato) é convergente.*

Demonstração:

No caso de uma sucessão u_n crescente em sentido lato, cujos termos sejam todos positivos, a demonstração pode fazer-se de modo semelhante ao seguido no n.º 18 para provar que a sucessão x_n era convergente. Como todos os u_n não menores que um certo número L, a parte inteira de u_n há-de *estabilizar-se* a partir de certa ordem *(porquê?)*. Depois disso, é o algarismo das décimas que se estabiliza, pois não pode crescer para lá de 9. Depois ainda, estabiliza-se o algarismo das centésimas. E assim sucessivamente. É claro que o número representado pela parte inteira e pelos algarismos decimais assim estabilizados é o limite para que tende u_n.

Se u_n é uma sucessão decrescente em sentido lato, limitada, e cujos termos são todos positivos, a demonstração é perfeitamente análoga (é o caso do n.º 18; veja o exemplo das pp. 60-61).

Finalmente, os restantes casos reduzem-se aos anteriores, notando que: 1) a partir de certa ordem os termos da sucessão são todos positivos, todos negativos ou todos nulos; 2) se $u_n \to a$, então $-u_n \to -a$.

(Convém ver o exemplo do número π, dado no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano*, pg. 169.)

CRITÉRIO DAS SUCESSÕES ENQUADRADAS. *Dadas três sucessões* u_n, v_n, x_n *tais que*

(1) $$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se u_n e v_n *tendem para um mesmo número* a, *também* $x_n \to a$.

Demonstração:*

Se $\lim u_n = \lim v_n = a$, então $\lim(u_n - v_n) = 0$. Por outro lado, a condição (1) implica

$$0 \leqslant x_n - u_n \leqslant v_n - u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e, como para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |v_n - u_n| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

também

$$n > r \Rightarrow |x_n - u_n| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

e, portanto, $x_n \to a$, q. e. d.

25. **Símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação.** O teorema do limite do quociente (n.º 22) exclui a hipótese em que o divisor tende para zero. Consideremos, agora, essa hipótese, isto é, suponhamos que o dividendo, u_n, tende para um

número real *a* qualquer e que o divisor, v_n, tende para 0, embora seja sempre $v_n \neq 0$. Neste caso, *não* podemos dizer que

$$\frac{u_n}{v_n} \text{ converge para } \frac{a}{0}$$

E, desde já, vamos ver porquê. Dois casos se podem dar:

1.° *caso:* $a \neq 0$. Neste caso, não existe quociente de *a* por 0, isto é, não existe nenhum número x tal que $0 \cdot x = a$ *(porquê?)*. Por outros termos:

A equação $0 \cdot x = a$ é *impossível.*

Por isso mesmo, a expressão a/0, que deveria indicar o quociente de *a* por 0, é chamada um *símbolo de impossibilidade*. São pois símbolos de impossibilidade, por exemplo, as expressões

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{0}, \frac{-2}{0}, \frac{\sqrt{2}}{0}, \frac{\pi}{0}, \text{ etc.}$$

2.° *caso*: $a = 0$. Neste caso, qualquer número real x verifica a condição $0 \cdot x = a$. Esta equação é, pois, *indeterminada* e, por isso mesmo, se diz que a expressão $\frac{0}{0}$ é um *símbolo de indeterminação.*

Conheceremos outros símbolos de indeterminação.

Vamos ver agora como, nos casos em que se obtêm símbolos de impossibilidade ou indeterminação, ainda se pode chegar muitas vezes a conclusões úteis na teoria dos limites.

26. Limites infinitos. Seja

$$u_n = 2 \quad \text{e} \quad v_n = 10^{-n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Então $u_n \to 2$ e $v_n \to 0$. Ora, u_n/v_n vem a dar a sucessão:

$$\frac{2}{0{,}1} \, , \, \frac{2}{0{,}01} \, , \, \frac{2}{0{,}001} \, , \, \ldots \, , \, \frac{2}{10^{-n}} , \ldots$$

ou seja:

$$20 \; , \; 200 \; , \; 2000 \; , \; \ldots \; , \; 2 \times 10^n \; , \; \ldots$$

Esta sucessão *não é convergente,* isto é, não tende para nenhum número real, mas apresenta a seguinte particularidade notável:

Os termos da sucessão tornam-se *definitivamente superiores* a qualquer número dado, isto é: qualquer que seja o número real L existe uma ordem r, depois da qual *todos* os termos da sucessão são superiores a L. Exprime-se este facto dizendo que a sucessão *tende para o infinito positivo* (ou que *tende para* $+\infty$, em que o símbolo $+\infty$ se lê 'mais infinito').

Dum modo geral:

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma sucessão u_n tende para $+\infty$, e escreve-se

$$u_n \to +\infty$$

sse, qualquer que seja o número real L, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são maiores que L [1]. Simbolicamente:

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0,\ \exists r \in \mathbb{N}:\ n > r \Rightarrow u_n > L$$

Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande positivo.*

Por outro lado:

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que u_n tende para $-\infty$ e escreve-se

$$u_n \to -\infty$$

sse $-u_n \to +\infty$. Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande negativo.*

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que u_n tende para ∞ e escreve-se

$$u_n \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \infty$$

sse $|u_n| \to +\infty$. Também se diz, neste caso, que u_n é um *infinitamente grande* (simplesmente).

Convém ver exemplos no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano,* pp. 150-152 e 165-166.

Quanto à noção de 'infinito matemático', interessa ler a 'Nota Histórica' do Capítulo V desse *Compêndio.*

---

(1) É claro que basta, neste caso, considerar números L positivos.

Desde já convém lembrar que uma sucessão é *convergente*, sse tende para um número real *(limite finito)*. Ora, se uma sucessão tende para infinito ($+\infty$, $-\infty$ ou apenas ∞), não pode tender para nenhum número real e é, portanto, *divergente*. Por este motivo, não é correcto dizer 'u_n *converge para* ∞', mas apenas 'u_n tende para ∞'.

Diz-se que uma sucessão é *propriamente* divergente, quando tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. É fácil reconhecer que:

Toda a sucessão monótona não limitada é propriamente divergente, sendo o seu limite $+\infty$ ou $-\infty$, conforme a sucessão é crescente ou decrescente. Outro tanto se pode dizer relativamente às sucessões monótonas em sentido lato.

Uma sucessão divergente que não seja propriamente divergente chama-se *oscilante*. Por exemplo, a sucessão

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \ldots,\ (-1)^n n,\ \ldots$$

é oscilante porque tende para ∞, mas não para $+\infty$ nem para $-\infty$. Por sua vez a sucessão

$$-1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$$

é oscilante, porque não *tende para limite algum, finito ou infinito.*

27. **Operações com limites infinitos.** Começaremos por estabelecer três lemas:

LEMA 1. $u_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to \infty$ (supondo $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Por outros termos: *O inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande.*

Demonstração:

Suponhamos que $u_n \to 0$, com $u_n \neq 0$, $\forall n$, e seja L um número positivo arbitrário. Então $1/L$ também é um número positivo e existe, portanto, uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{L} \quad \textit{(porquê?)}$$

Ora

$$|u_n| < \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} > L$$

e, como $\dfrac{1}{|u_n|} = \left|\dfrac{1}{u_n}\right|$ *(porquê?)*, tem-se:

$$n > r \Rightarrow \frac{1}{|u_n|} > L,$$

o que significa que $1/u_n \to \infty$.

LEMA 2. $u_n \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \to 0$ (supondo $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Por outros termos: *O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo.*

A demonstração é análoga à anterior.

Estes dois lemas podem resumir-se num enunciado único:

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} \to \infty \qquad (\text{com } u_n \neq 0 \;,\; \forall n \in \mathbb{N})$$

LEMA 3. *Se* $v_n \to \infty$ *e se existe um número* $\varepsilon > 0$ *tal que* $|u_n| > \varepsilon$ *a partir de certa ordem, então* $u_n v_n \to \infty$.

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese e seja L um número positivo arbitrário. Então L/ε também é um número positivo e, portanto, existe uma ordem r tal que

$$(1) \qquad n > r \Rightarrow |v_n| > \frac{L}{\varepsilon} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por outro lado, existe uma ordem s tal que

$$(2) \qquad n > s \Rightarrow |u_n| > \varepsilon \qquad \textit{(porquê?)}$$

Então se for p o maior dos números r, s, virá de (1) e (2):

$$n > p \Rightarrow |v_n| > \frac{L}{\varepsilon} \wedge |u_n| > \varepsilon$$

e portanto

$$n > p \Rightarrow |u_n v_n| > L$$

o que prova que $u_n v_n \to \infty$.

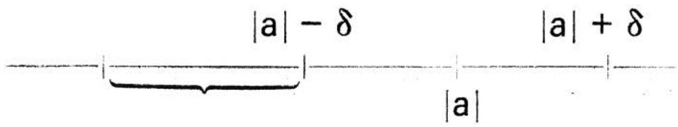
Posto isto, podemos demonstrar os seguintes teoremas:

TEOREMA 1. *Se* u_n *tende para um limite* a *diferente de zero (finito ou infinito) e* $v_n \to \infty$, *então* $u_n v_n \to \infty$.

Demonstração:*

Aplicando o lema 3, basta demonstrar que existe um número $\varepsilon > 0$ tal que $|u_n| > \varepsilon$ a partir de certa ordem. Ora isto será verdade, se $u_n \to \infty$ (por definição). Resta-nos, pois, analisar o caso em que u_n tende para um número *a* diferente de zero. Neste caso, $|u_n| \to |a|$ (ver n.º 21). Portanto, se tomarmos um número positivo $\delta < |a|$, existe uma ordem r tal que

$$n > r \Rightarrow |a| - \delta < |u_n| < |a| + \delta$$



Então, se pusermos $\varepsilon = |a| - \delta$, será $\varepsilon > 0$ *(porquê?)* e

$$n > r \Rightarrow |u_n| > \varepsilon \quad , \quad \text{q. e. d.}$$

TEOREMA 2. *Se* u_n *tende para um limite* $a \neq 0$ *e* $v_n \to 0$, *então* $\frac{u_n}{v_n} \to \infty$ (supondo $v_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Este teorema é consequência imediata do anterior e do lema 1, visto que se tem:

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n}$$

TEOREMA 3. *Se* u_n *tende para um limite finito e* $v_n \to \infty$ *então* $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ (supondo $v_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Demonstração:

Suponhamos que $u_n \to a$ (finito) e $v_n \to \infty$. Então $1/v_n \to 0$ e, pelo teorema do produto (n.º 22):

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim (u_n \cdot \frac{1}{v_n}) = \lim u_n \cdot \lim \frac{1}{v_n} = a \cdot 0 = 0$$

TEOREMA 4. *Se* $u_n \to \infty$ *e* v_n *tende para um limite finito, então* $\frac{u_n}{v_n} \to \infty$ (*com* $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Este teorema é consequência do teorema 1, notando que, se v_n tende para um limite *a* finito, então $1/v_n$ tende para um limite diferente de zero, que será finito ou infinito, conforme $a \neq 0$ ou $a = 0$.

TEOREMA 5. *Se* u_n *tende para um limite finito e* $v_n \to \infty$, *então* $u_n + v_n \to \infty$.

Deixamos a demonstração ao cuidado do leitor.

28. **Regras de cálculo com o símbolo** ∞. A fim de facilitar a aplicação dos teoremas anteriores, é cómodo adoptar as seguintes convenções:

I. $\frac{a}{0} = \infty$, se $a \neq 0$.

II. $\frac{a}{\infty} = 0$, se $a \neq \infty$.

III. $a \cdot \infty = \infty$, se $a \neq 0$

IV. $\frac{\infty}{a} = \infty$, se $a \neq \infty$

V. $a + \infty = \infty$, se $a \neq \infty$.

Note-se que estas convenções são as expressões abreviadas, respectivamente, dos teoremas 2, 3, 1, 4 e 5. Tais convenções permitem-nos, agora, generalizar os teoremas relativos aos limites da soma, do produto e do quociente, tornando mais cómodo o cálculo dos limites. Assim, o TEOREMA DO LIMITE DO QUOCIENTE pode, agora, generalizar-se nos seguintes termos:

O limite dum quociente é igual ao quociente do limite do dividendo pelo limite do divisor, quando estes limites existem e não são ambos nulos nem ambos infinitos.

Por sua vez o TEOREMA DO LIMITE DO PRODUTO surge com o aspecto:

O limite dum produto é sempre igual ao produto dos limites dos factores, quando estes limites existem, sem que um deles seja infinito e o outro nulo.

Finalmente o TEOREMA DO LIMITE DA SOMA generaliza-se deste modo:

O limite duma soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes limites existem e não são ambos infinitos.

Note-se que os teoremas da potência e da raiz também podem ser generalizados. Assim, é fácil provar que:

Se $u_n \to \infty$, então $u_n^p \to \infty \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Se $u_n \to +\infty$, então $\sqrt[p]{u_n} \to +\infty \quad , \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Estes teoremas dão lugar às convenções:

$$\infty^p = \infty, \quad \sqrt[p]{\infty} = \infty \qquad \text{se } p \in \mathbb{N}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

$$\frac{1+n}{3(1+\frac{1}{n})} \to \frac{1+\infty}{3(1+0)} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

$$(1+\sqrt{n})\,(1+n^2) \to (1+\sqrt{\infty})\,(1+\infty) = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\sqrt{n}} \to \frac{3+\frac{1}{\infty}}{1-\sqrt{\infty}} = \frac{3+0}{1-\infty} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Note-se que, nos dois primeiros exemplos, o limite é precisamente $+\infty$, enquanto no terceiro o limite é $-\infty$.

29. **Novos símbolos de indeterminação.** Na regra I do número anterior excluímos a hipótese $a = 0$. Nesse caso, obtém-se a expressão $0/0$ que, como já foi dito atrás, é um *símbolo de indeterminação*. Quando duas sucessões u_n e v_n tendem ambas para zero, todos os casos se podem dar a respeito do quociente u_n/v_n: ou é convergente ou tende para infinito ou não tende para limite algum. Veremos exemplos destes diversos casos, ao tratarmos de limites de funções de variável real.

Interessa-nos, agora, estudar novos símbolos de indeterminação:

a) *Símbolo* $\frac{\infty}{\infty}$. Nas regras II e IV do número anterior excluímos a hipótese $a = \infty$. Nesse caso, obtém-se a expressão ∞/∞, que é um *símbolo de indeterminação*. Quer isto dizer o seguinte: quando duas sucessões u_n e v_n tendem ambas para ∞, todos os casos se podem dar a respeito do quociente u_n/v_n, como vamos ver com exemplos.

I. Seja

$$u_n = n-1 \text{ e } v_n = 3n+1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Então $u_n \to \infty$ e $v_n \to \infty$. Por substituição em u_n/v_n, obtém-se o símbolo de indeterminação ∞/∞, que nada esclarece. Porém, dividindo ambos os termos da fracção por n, obtém-se:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \to \frac{1-\frac{1}{\infty}}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

A sucessão u_n/v_n converge, portanto, para 1/3.

II. Seja $u_n = 1-n$ e $v_n = 2+\sqrt{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Então $u_n \to \infty$, $v_n \to \infty$, e obtém-se, novamente, o símbolo ∞/∞ por substituição em u_n/v_n. Mas

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1-n}{2+\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{\frac{1}{\infty}-1}{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Por conseguinte $u_n/v_n \to \infty$.

III. Seja, agora, $u_n = 1+(-1)^n n$ e $v_n = n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Neste caso, obtém-se ainda a indeterminação ∞/∞. Mas

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

O termo $1/n$ tende para zero. O termo $(-1)^n$ não tende para limite algum (finito ou infinito). Logo, a soma dos dois, igual a u_n/v_n, também não tende para limite algum.

Nos exemplos I e II achou-se um limite para u_n/v_n; diz-se então que se *levantou a indeterminação* (indeterminação aparente). No exemplo III não existe limite: diz-se então que *é impossível levantar, a indeterminação* (indeterminação real).

b) *Símbolo* $0 \times \infty$. Na regra III do número anterior excluímos a hipótese $a = 0$. Neste caso, obtém-se a expressão $0 \times \infty$, que é um *símbolo de indeterminação;* quer dizer: quando $u_n \to 0$ e $v_n \to \infty$ todos os casos se podem dar a respeito do produto $u_n v_n$, como se pode ver com exemplos.

c) *Símbolo* $\infty - \infty$. Na regra V do número anterior excluímos a hipótese $a = \infty$. Neste caso, é-se conduzido, em geral, a um novo tipo de indeterminação. Mas convém, desde já, notar os seguintes factos, que é fácil provar:

Se $u_n \to +\infty$ *e* $v_n \to +\infty$, *também* $u_n + v_n \to +\infty$

Se $u_n \to -\infty$ *e* $v_n \to -\infty$, *também* $u_n + v_n \to -\infty$

Abreviadamente, podemos exprimir estes factos pelas fórmulas:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

Mas se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to -\infty$ (ou vice-versa), somos conduzidos à expressão

$$(+\infty) + (-8)$$

que abreviadamente se escreve $\infty - \infty$ e que é um símbolo de indeterminação. Seja por exemplo:

$$u_n = 3n \text{ e } v_n = -\sqrt{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ e somos conduzidos à indeterminação $\infty - \infty$, para $u_n + v_n$. Porém

$$u_n + v_n = 3n - \sqrt{n} = n\left(3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to \infty \times \left(3 - \frac{1}{\infty}\right) = \infty$$

Portanto, neste caso, $u_n + v_n \to \infty$ (mais precisamente $u_n + v_n \to +\infty$). Outros casos se podem verificar.

NOTA. Quando duas sucessões u_n e v_n tendem para ∞ *sem sinal determinado* (uma pelo menos), todos os casos se podem dar a respeito de $u_n + v_n$. Deste modo, a expressão $\infty + \infty$ deve, em rigor, ser considerada um símbolo de indeterminação.

30. **Limite da exponencial.** Seja *a* um número real qualquer e consideremos a sucessão

$$a, \ a^2, \ a^3, \ \ldots, \ a^n, \ \ldots$$

constituída pelas sucessivas potências de expoente natural de *a*.

TEOREMA. *Se* $a > 1$, *a sucessão* $n \curvearrowright a^n$ *tende para* $+\infty$ (1).

(1) Neste caso, empregamos a expressão rigorosa 'sucessão $n \curvearrowright a^n$' em vez da expressão abreviada 'sucessão a_n', para evitar possíveis equívocos.

Demonstração:

Suponhamos $a > 1$. Então, se pusermos $h = a - 1$, será $h > 0$ e $a = 1 + h$, donde, segundo a fórmula do binómio:

$$(1) \qquad a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2}h + \ldots + h^n$$

Mas, como $h > 0$, os termos $\binom{n}{2}$, ..., h^n são todos positivos se $n > 1$ (e nulos se $n = 1$). Logo, de (1) resulta:

$$(2) \qquad a^n \geqslant 1 + nh \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Com esta fórmula é fácil agora demonstrar que $a^n \to +\infty$. Com efeito, seja L um número real qualquer. Ora, de (2) resulta:

$$1 + nh > L \Rightarrow a^n > L$$

Mas

$$1 + nh > L \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{h}$$

Logo

$$n > \frac{L-1}{h} \Rightarrow a^n > L$$

Daqui se conclui:

$$\forall L \in \mathbb{R} \quad , \quad \exists p \in \mathbb{N}: \; n > p \underset{n}{\Rightarrow} a^n > L$$

Mas isto significa que $a^n \to +\infty$, q. e. d.

EXEMPLOS:

$$2^n \to +\infty \quad , \quad 1{,}01^n \to +\infty \quad , \quad \text{etc.}$$

COROLÁRIO 1. *Se* $|a| > 1$, *então* $a^n \to \infty$.

Com efeito, $|a^n| = |a|^n$, quaisquer que sejam $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Então, se $|a| > 1$, tem-se pelo teorema:

$$|a|^n \to +\infty \quad \text{e portanto} \quad |a^n| \to +\infty$$

ou seja $a^n \to \infty$ (cf. n.º 26, pg. 88).

É claro que $|a| > 1 \Leftrightarrow a > 1 \vee a < -1$. Se $a > 1$, então $a^n \to +\infty$ como já vimos. Se $a < -1$, então $a^n \to \infty$ sem sinal determinado. Por exemplo, se $a = -2$, tem-se a sucessão oscilante:

$$-2,\ 4,\ -8,\ 32,\ -64,\ \ldots,\ (-2)^n,\ \ldots \to \infty$$

COROLÁRIO 2. *Se* $|a| < 1$, *então* $a^n \to 0$.

Com efeito, suponhamos $|a| < 1$. Então se pusermos $k = 1/a$, vem:

$$|k| = \frac{1}{|a|} > 1$$

e portanto $k^n \to \infty$ segundo o corolário anterior. Por outro lado, tem-se $a = 1/k$, donde

$$a^n = \frac{1}{k^n} \quad \text{e portanto} \quad a^n \to 0 \qquad \textit{(porquê?)}$$

EXEMPLOS:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad , \quad 0{,}75^n \to 0 \quad , \quad 0{,}9999^n \to 0$$

A primeira destas sucessões tende para 0 por valores alternadamente positivos e negativos. E as outras duas?

Podemos escrever então $0{,}75^n \to 0^+$, etc.

Resta-nos analisar o caso em que $|a| = 1$, isto é, em que $a = 1$ ou $a = -1$. Se $a = 1$, tem-se $1^n = 1$ para todo o *n* e assim $a^n \to 1$. Se $a = -1$, tem-se a sucessão $-1, 1, -1, \ldots$ que, como vimos, não tende para limite algum. Em resumo:

$$|a| > 1 \Rightarrow a^n \to \infty \begin{cases} a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty \\ a < -1 \Rightarrow a^n \text{ oscilante} \end{cases}$$

$$|a| < 1 \Rightarrow a^n \to 0$$

$$a = 1 \Rightarrow a^n \to 1 \quad , \quad a = -1 \Rightarrow a^n \text{ não tem limite}$$ [1].

31. **Soma de todos os termos duma progressão geométrica.** Como é sabido, sendo r um número real qualquer, chama-se *progressão geométrica de razão* r toda a sucessão em que cada termo

---

(1) Ver exercícios no final do número seguinte.

a partir do segundo é igual ao produto do anterior por r. Se for *a* o primeiro termo, a progressão geométrica de razão r será

$$a \ , \ ar \ , \ ar^2 \ , \ ar^3 \ , \ \dots$$

e vê-se que o termo de ordem *n* (termo geral) é:

$$(1) \qquad a_n = a\, r^{n-1}$$

Vamos, agora, supor sempre $a \neq 0$. Como é sabido, a soma dos *n* primeiros termos da sucessão (1) é dada pela fórmula

$$(2) \qquad \boxed{S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}, \text{ quando } r \neq 1}$$

Tem-se, com efeito, supondo $r \neq 1$,

$$\frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$$

e portanto

$$a \frac{1-r^n}{1-r} = a + ar + \dots + ar^{n-1} = S_n$$

Consideremos, agora, a sucessão

$$S_1, \ S_2, \ \dots, \ S_n, \ \dots$$

Quatro casos se podem dar[1]:

1.º caso. $|r| < 1$. Então, aplicando o corolário 2 do número anterior e lembrando que a e r são *constantes* na sucessão, virá:

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \to a \frac{1 - 0}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

2.º caso. $|r| > 1$. Virá, então, aplicando o corolário 1 do número anterior e lembrando que $a \neq 0$:

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r} \to a \frac{1 - \infty}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} \times \infty = \infty$$

Mais ainda, é fácil ver que:

$$r > 1 \Rightarrow S_n \to +\infty \text{ se } a > 0 \text{ e } S_n \to -\infty \text{ se } a < 0$$

$$r < -1 \Rightarrow S_n \text{ oscilante}$$

3.º caso. $r = 1$. Agora $S_n = a + \ldots + a$ (n vezes) $=$ na e portanto $S_n \to \infty$, visto que $a \neq 0$.

4.º caso. $r = -1$. Agora $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, ... e, como $a \neq 0$, vê-se que S_n *não tende para limite algum.*

---

(1) Será conveniente estudar antes disto os exemplos concretos mais simples (I, II e V) que vêm a seguir, indo assim do *particular para o geral.* Convirá, depois, voltar do *geral ao particular,* aplicando a teoria a exemplos concretos menos simples.

Desta análise, resulta em particular o seguinte

TEOREMA. *A sucessão* S_n *é convergente, sse* $|r| < 1$. *Neste caso, tem-se:*

$$\boxed{\lim S_n = \frac{a}{1-r}}$$

EXEMPLOS:

I. Consideremos a progressão geométrica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \ldots$$

cujo primeiro termo é $a = 1/2$ e cuja razão é $r = 1/2$. A soma dos seus *n* primeiros termos é:

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

e portanto, neste caso, $S_n \to 1$.

Este limite aparece intuitivamente ao nosso espírito como sendo a soma de *todos* os termos da sucessão. Teremos pois assim uma *soma com uma infinidade de parcelas,* que somos levados a representar pela expressão:

(3) $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

ou, abreviadamente, por qualquer das expressões:

$$(3') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,, \text{ etc. (n, k, etc. são } \textit{índices mudos}\text{).}$$

A expressão (3) ou qualquer das suas equivalentes (3') é chamada uma *série geométrica* e, precisamente, a *série geométrica de razão* 1/2, *cujo primeiro termo é* 1/2.

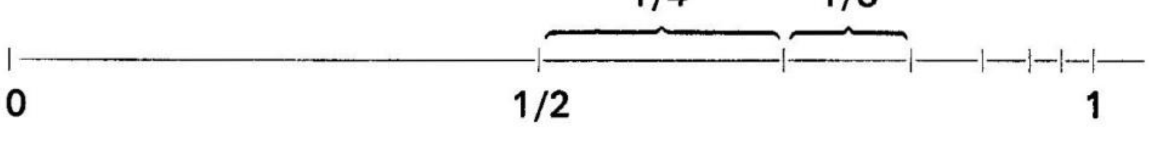
O valor destas expressões será, pois, o limite da referida sucessão S_n, isto é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Este exemplo está relacionado com o PARADOXO DA DICOTOMIA (DE ZENÃO), numa das suas formas:

Tudo o que se move tem de percorrer metade do caminho, antes de chegar ao fim; tem de percorrer, depois, metade do que resta (ou seja 1/4 *do total); depois ainda, metade do que resta (ou seja* 1/8 *do total) e assim sucessivamente. Deste modo, nunca chega ao fim, o que equivale a dizer que não existe movimento.*

A situação é descrita na figura seguinte:



Segundo as considerações anteriores, poderíamos dizer que o percurso total (ou seja a unidade) é a soma de uma infinidade de parcelas indicada pela expressão (3). Matematicamente, o paradoxo é resolvido de modo análogo ao que se indica no *Compêndio de Álgebra, 6.º Ano,* para o *paradoxo da tartaruga*. O exemplo seguinte aplica-se a este paradoxo.

II. Consideremos a dízima infinita de período 1

$$11{,}11111111\ldots,$$

que se escreve abreviadamente: 11,(1). Esta dízima representa, por definição, o limite da sucessão

$$10;\ 11;\ 11{,}1;\ 11{,}11;\ 11{,}111;\ 11{,}1111;\ldots,$$

cujo termo geral é a soma dos *n* primeiros termos da progressão geométrica de razão 0,1:

$$10;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots;\ 10^{-n+2};\ \ldots$$

Será, pois, agora $a = 10$, $r = 1/10$ e portanto

$$S_n = 10\ \frac{1 - 0{,}1^n}{1 - 0{,}1}\ ,$$

donde:

$$S_n \to \frac{10}{1 - 0{,}1} = \frac{100}{9} = 11\ \frac{1}{9}$$

III. Seja a dízima infinita de período 327

$$0{,}327\,327\,327\ \ldots = 0{,}(327)$$

Esta equivale à expressão

$$0{,}327 + 0{,}000\,327 + 0{,}000\,000\,327 + \ldots$$

que é a série geométrica de razão 0,001, *cujo primeiro termo é* 0,327. Tem-se, pois, neste caso:

$$\lim S_n = \frac{0{,}327}{1-0{,}001} = \frac{327}{999}$$

ou seja 0,(327) = 327/999.

Analogamente se reconhece que

$$5{,}(37) = 5 + 0{,}(37) = 5 + \frac{37}{99}\,,$$

$$2{,}3(8) = 2{,}3 + \frac{0{,}(8)}{10} = 2{,}3 + \frac{8}{90}\,,\ \text{etc.}$$

e que, dum modo geral, *toda a dízima periódica representa um número racional.*

A recíproca, como se sabe, também é verdadeira: *todo o número racional é representável por uma dízima periódica* (cujo período pode ser 0, em particular). E é fácil ver porquê. Consideremos, por exemplo, o número racional 35/273. Ao aplicar o processo habitual da divisão para converter esta fracção em dízima, os *restos parciais sem vírgula são, necessariamente, menores que o divisor,* 273; há, por isso, *quando muito,* 273 restos parciais diferentes (sem vírgula), e assim chegará um momento em que *reaparece* um destes restos, o que dá origem a uma *sequência de algarismos que se vai repetindo indefinidamente.* Essa sequência de algarismos é precisamente o período.

Note-se que, *em geral,* o facto de uma dízima ser periódica tem interesse meramente teórico, sobretudo se o número de algarismos do período é muito grande. Basta lembrar que, *na prática,* se trabalha normalmente com valores aproximados, representados no sistema decimal com um número limitado de algarismos exactos (12 nos melhores computadores).

IV. Considere a progressão geométrica de razão $-1/2$ e cujo primeiro termo é $1/2$. a) Calcule, sob a forma de dízima, a soma dos *n* primeiros termos da progressão, sendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e represente os resultados sobre um eixo. b) Calcule, sob as formas de fracção ordinária e de dízima, a soma de todos os termos da progressão, e indique de que modo S_n tende para essa soma.

V. ASAPHAD, historiador árabe, conta que SESSA apresentou o jogo de xadrez, que acabara de inventar, a SHERAN, príncipe da India. Perguntando-lhe este que recompensa queria, SESSA respondeu: 'Que V. Majestade se digne dar-me 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 pela 2.ª, 4 pela 3.ª, e assim sucessivamente, duplicando sempre até à 64.ª casa'. Encantado com a modéstia do inventor, o príncipe ordenou aos seus ministros que lhe satisfizessem o pedido. Pergunta-se: a) Quantos grãos de trigo receberia SESSA? b) Que área seria necessária semear para colher esse trigo, supondo que 1 hectare produz 25 hl e que 1 hl contém aproximadamente

2 000 000 de grãos? (Basta apresentar os resultados com dois algarismos exactos, utilizando logaritmos ou a régua de cálculo.)

Resp.: a) $2^{64}-1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ grãos; b) $3{,}6 \times 10^{11}$ ha.

Obs.: Como a área total das terras sobre o Globo é aproximadamente $1{,}3 \times 10^{10}$ ha, seria necessária mais de 28 vezes esta área e, descontando as terras incultas, seriam necessários vários séculos para pagar o trigo prometido.

Este exemplo mostra como é rápido o *crescimento exponencial,* isto é, o crescimento da função exponencial a^n quando $a > 1$ (também se diz '*crescimento em progressão geométrica*' em vez de '*crescimento exponencial*'). Note-se porém que, se a base é maior que 1 mas *próxima de* 1, o crescimento só começa a ser rápido a partir de uma ordem elevada. Exemplo: calcular, por meio de logaritmos, a ordem a partir da qual se tem $1{,}01^n > 1000$.

Analogamente, se $|a| < 1$, a^n *tende em geral rapidamente para zero,* mas se $|a|$ é próximo de 1, a convergência só começará a ser rápida a partir de uma ordem elevada. Exemplo: calcular a ordem a partir da qual se tem $0{,}99^n < 0{,}01$.

EXERCÍCIOS RELATIVOS AO NÚMERO ANTERIOR

I. Indicar quais das seguintes sucessões são convergentes e determinar os respectivos limites:

a) $\dfrac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{5^n + 2^n}$; b) $\sqrt[n]{5^n + 2^n}$; c) $\sqrt[n]{5^n + (-5)^n}$

d) $\sqrt[n]{|(-5)^n + 2^n|}$; e) $\sqrt[n]{5^n + 2^n + (-2)^n}$

II. Indicar uma condição suficiente a que devem satisfazer dois números reais *a, b,* para que a sucessão $\sqrt[n]{|a^n + b^n|}$ seja convergente, e determine, nesse caso, o limite.

III. Problema análogo ao anterior para

$$\sqrt[n]{|a^n + b^n + c^n|}$$

IV. Sendo *a* um número maior que 1 e r um número real qualquer, achar sucessivamente os limites de

$$\frac{a^n}{n}, \quad \frac{a^n}{n^2}, \quad \frac{a^n}{n^r}$$

V*. Sendo *a* um número real qualquer, achar o limite da sucessão $\dfrac{a^n}{n!}$.

Ver respostas no final do número seguinte.

32. **Aproximações por meio de séries. Série binomial*** Há métodos de aproximações sucessivas que não se enquadram no esquema dos métodos iterativos. Um deles é o *método dos desenvolvimentos em série.* Segundo este, os sucessivos valores aproximados são obtidos a partir de uma sucessão

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

adicionando sucessivamente os seus termos, o que dá:

$$u_1,\ u_1 + u_2,\ u_1 + u_2 + u_3, \ldots,\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$$

Designaremos por s_n a soma dos *n* primeiros termos da sucessão dada, isto é, ponhamos

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Assim, a partir da sucessão dada, obtivemos uma nova sucessão, de termo geral s_n. O que interessa na prática, primeiro que tudo, é que a nova sucessão seja convergente. Representando por *s* o seu limite, isto é, pondo $s = \lim s_n$, é-se levado a escrever então

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ou, condensadamente,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Em qualquer hipótese, a expressão

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

ou a sua abreviatura $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é chamada uma *série*, cujos *termos* são $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *Portanto, em matemática, a palavra 'série' não significa o mesmo que 'sucessão' ao contrário do que acontece na linguagem vulgar.*

A série diz-se *convergente,* se a soma s_n dos seus *n* primeiros termos é convergente quando *n* aumenta indefinidamente; isto é, se a sucessão s_n tende para um limite finito, s. Neste caso, o limite *s* é chamado a *soma da série,* e então $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$ são os sucessivos valores aproximados da soma da série.

Se a sucessão s_n é divergente, a série também se diz *divergente.*

O primeiro exemplo de série que se nos apresenta naturalmente é o das séries geométricas, estudadas no número anterior. As séries geométricas estão na base do *estudo geral das séries,* que tem como objectivos fundamentais estabelecer:

1) *critérios de convergência,* isto é, condições que sejam suficientes ou necessárias (ou ambas as coisas) para que a série dada seja convergente;

2) *processos de cálculo* que permitam, dada uma série convergente e um número positivo δ, determinar *n* de modo que s_n seja valor aproximado de s a menos de δ(1).

Aliás, é de notar que as próprias dízimas infinitas são séries, representadas abreviadamente.

Por exemplo, a dízima periódica 0,666 ... 6... é uma abreviatura da série geométrica

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

---

(1) Na prática, trabalha-se geralmente com valores aproximados dos termos $u_1, u_2, \ldots$ e então haverá que contar também com o erro da própria soma s_n.

e, na prática, o cálculo da soma de uma série consiste afinal em passar esta à forma de dízima.

Um outro exemplo importante de série é o das *séries binomiais*. Como é sabido, sendo r um número inteiro $\geqslant 0$, tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + x^r$$

Suponhamos, agora, que r é um *número real não pertencente* a $\mathbb{N}_0$, e continuemos a escrever neste caso:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} \quad , \ \forall k \in N_0$$

Como, agora, se tem $r \neq k$, $\forall k$, o *coeficiente binomial* $\binom{r}{k}$ não se anula por maior que seja *k* e assim, em vez de uma *soma com um número finito de parcelas*, tem-se uma *série*

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \ldots + \binom{r}{n} x^n + \ldots$$

chamada *série binomial*.

Ora bem: *prova-se que esta série é convergente se* $|x| < 1$ *e que, neste caso, a soma da série é de facto igual a* $(1+x)^r$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

As séries binomiais têm numerosas aplicações. Vamos indicar apenas uma, de carácter elementar. Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt[5]{23}$ (cf. n.º 18) pelo *método dos desenvolvimentos em série.* Como

$$23 = 2^5 - 9,$$

tem-se:

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[5]{2^5\,(1 - \tfrac{9}{32})} = 2\,(1 - \frac{9}{32})^{\frac{1}{5}}$$

Como, por outro lado, $9/32 < 1$, podemos aqui aplicar a série binomial:

$$(1 - \frac{9}{32})^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{32} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)}{2} (\frac{9}{32})^2 -$$

$$- \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)(\frac{1}{5} - 2)}{2 \times 3} (\frac{9}{32})^3 + \ldots$$

Note-se que, para o cálculo aproximado da soma da série, é preciso reduzir as fracções ordinárias à forma decimal. A série converge rapidamente, mas este método para o cálculo da raiz é muito menos expedito que o de NEWTON, mesmo quando se trabalha com um computador.

Veremos que são conhecidas diversas séries para o cálculo do número π com a aproximação que se queira; mas há umas cuja convergência é mais rápida que outras.

EXERCÍCIO. Verificar que, se $r = -1$, o desenvolvimento de $(1+x)^r$ em série binomial coincide com o desenvolvimento em série geométrica de razão x.

RESPOSTAS AOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR

I. São convergentes todas menos a terceira e o limite é 5.

II. $|a| > |b|$ ou $|b| > |a|$. O limite é $|a|$ ou $|b|$, conforme $|a| > |b|$ ou $|b| > |a|$.

III. Por exemplo: $|a| > |b| \geqslant |c|$. Neste caso o limite é $|a|$.

IV. O limite é sempre ∞, isto é: *a exponencial* a^n (com $a > 1$) *cresce mais rapidamente que qualquer potência de* n (ou ainda: é um infinitamente grande de *ordem superior* à de qualquer potência de n). A ideia-chave é a mesma da demonstração do teorema do n.º 30, considerando mais termos no desenvolvimento binomial e atendendo a este facto: '*Se* $v_n \to +\infty$ *e* $u_n \geqslant v_n$ *a partir de certa ordem, então* $u_n \to +\infty$'.

V. O limite é zero. A ideia-chave consiste em considerar um determinado número natural $p > |a|$ e decompor $a^n/n!$ num produto de dois factores, o primeiro dos quais é a *constante* $a^p/p!$, notando que se tem:

$$\frac{|a|}{k} < \frac{|a|}{p} \quad , \quad \forall k > p \qquad \text{se } a \neq 0$$

(considerar em primeiro lugar o caso $a \geqslant 0$*)*.

Em particular, se $a > 1$, vê-se que a exponencial a^n é um infinitamente grande de *ordem inferior* à de $n!$ *Aliás, já no 6.º ano se tinha observado que a função factorial cresce rapidissimamente.*

33. **Um método geral de resolução de equações algébricas de qualquer grau*.** O método que vamos expor resumidamente chama-se *método de Gräffe* (do nome do matemático suíço que o inventou há mais de um século) e baseia-se num facto muito simples, que é a generalização dos resultados dos exercícios II e III do n.º 30:

Seja p *um número natural qualquer (fixo) e* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *números quaisquer, reais ou complexos, tais que*

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| \geqslant |\alpha_3| \geqslant \ldots \geqslant |\alpha_p|$$

Nestas condições, a sucessão de termo geral

$$\sqrt[n]{|\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_p^n|} \qquad (\textit{com } n \textit{ variável})$$

tende para $|\alpha_1|$ (1).

Para maior clareza, consideremos, em primeiro lugar, o caso de uma equação do 3.º grau:

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$$

de coeficientes reais. Designando por x_1, x_2, x_3 as raízes desta equação, já sabemos que se tem:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \ , \ \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \ , \ -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3$$

(1) Supõe-se que, neste momento, já se conhece o conceito de 'módulo dum número complexo' e a extensão das propriedades dos módulos da soma, do produto e do quociente ao corpo complexo. O aluno pode fazer, por si, a demonstração do facto enunciado.

Dividindo ambos os membros de (1) por *a* e pondo $b/a = A_1$, $c/a = A_2$, $d/a = A_3$, obtém-se a equação equivalente:

$$(1') \qquad x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

Seja, agora, *n* um número natural qualquer e suponhamos que foi possível achar, por qualquer processo, *a equação do* 3.º *grau que tem por raízes* x_1^n, x_2^n, x_3^n. Se a escrevermos sob a forma

$$(2) \qquad x^3 + A_1^{(n)}x^2 + A_2^{(n)}x + A_3^{(n)} = 0$$

será, pois:

$$-A_1^{(n)} = x_1^n + x_2^n + x_3^n\,,\quad A_2^{(n)} = x_1^nx_2^n + x_1^nx_3^n + x_2^nx_3^n\,,\quad -A_3^{(n)} = x_1^nx_2^nx_3^n$$

Em tudo o que segue supomos os índices 1, 2, 3, escolhidos de tal modo que

$$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$$

Vamos, agora, considerar dois casos particulares (os outros casos possíveis são tratados de modo análogo):

1.º caso. As raízes x_1, x_2, x_3 são reais e

$$|x_1| > |x_2| > |x_3|.$$

Então será também $|x_1 x_2| > |x_1 x_3| > |x_2 x_3|$ e, aplicando duas vezes a propriedade anterior, vê-se que:

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} = \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n|} \quad \to |x_1|$$

(quando $n \to \infty$)

$$\sqrt[n]{|A_2^n|} = \sqrt[n]{|x_1^n x_2^n + x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n|} \quad \to |x_1 x_2|$$

Portanto, se *n* for *bastante elevado,* teremos, com *boa aproximação:*

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} \approx |x_1| \quad , \quad \sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} \approx |x_1 x_2|$$

Uma vez calculados $|x_1|$ e $|x_1 x_2|$ com a devida aproximação, podemos calcular $|x_2|$ e $|x_3|$, por meio das fórmulas

$$|x_2| = \frac{|x_1 x_2|}{|x_1|} \quad , \quad |x_3| = \frac{|x_1 x_2 x_3|}{|x_1 x_2|} = \frac{|A_3|}{|x_1 x_2|}$$

Resta, pois, achar os *sinais* das raízes, visto que já conhecemos os seus *módulos*. Para isso, há vários processos. O mais elementar consiste em verificar directamente quais dos números $|x_1|, -|x_1|$, $|x_2|$, $-|x_2|$, $|x_3|$, $-|x_3|$ são efectivamente raízes. Trata-se, pois, de calcular, com a aproximação possível, os valores de

$$f(|x_1|) \quad , \quad f(-|x_1|) \quad , \quad \text{etc.}$$

sendo $f(x)$ o primeiro membro da equação do 3.º grau proposta, e ver quais são *aproximadamente nulos*. Este processo elementar tem a vantagem de permitir um controlo dos cálculos, evitando possíveis erros cometidos no cálculo dos módulos.

2.º caso. *As raízes* x_1 *e* x_2 *são imaginárias (conjugadas) e têm módulo superior ao da raiz* x_3 *(real).* Seja $x_1 = u + iv$, $x_2 = u - iv$, com $u, v \in \mathbb{R}$. Então $|x_1| = |x_2| = \sqrt{u_2 + v_2} > |x_3|$ e a sucessão cujo termo geral é

$$\sqrt[n]{|A_1^{(n)}|} = \sqrt[n]{|x_1^n + x_2^n + x_3^n|}$$

não converge. Mas, como

$$|x_1 x_2| > |x_1 x_3| = |x_2 x_3|,$$

a sucessão $\sqrt[n]{|A_2^{(n)}|}$ converge e tem-se, precisamente:

$$\lim \sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} = |x_1 x_2|$$

Assim, teremos com a aproximação que quisermos

$$\sqrt[n]{|A_2^{(n)}|} \approx |x_1 x_2|$$

desde que *n* seja bastante elevado. Quanto a $|x_3|$, tem-se:

$$|x_3| = \frac{|x_1 x_2 x_3|}{|x_1 x_2|} = \frac{|A_3|}{|x_1 x_2|}$$

Como $|x_1 x_2| = x_1 x_2 = (u+iv)\,(u-iv) = u^2 + v^2 > 0$, o sinal de x_3 será o de $-A_3$. Finalmente, note-se que

$$x_1 + x_2 = -A_1 - x_3$$

A partir de x_1x_2 e $x_1 + x_2$ determinam-se x_1 e x_2 pelo processo usual:

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + i\sqrt{x_1x_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - i\sqrt{x_1x_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

Um caso perfeitamente análogo é aquele em que as raízes x_2 e x_3 são imaginárias, com módulo inferior ao de x_1.

Mas, todas as considerações precedentes foram baseadas numa hipótese: a de que sabemos construir a equação (2), cujas raízes são x_1^n, x_2^n, x_3^n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. No entanto, é claro que *basta saber construir tais equações para valores de* n *tão grandes quanto se queira*. Ora, isso é possível por meio de um artifício muito simples, que vamos indicar.

Consideremos, de novo, a equação

$$(3) \qquad x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

Esta equação é equivalente a

$$x^3 + A_2x = -A_1x^2 - A_3$$

Esta, por elevação ao quadrado, implica a seguinte:

$$x^6 + 2A_2x^4 + A_2^2x^2 = A_1^2x^4 + 2A_1A_3x^2 + A_3^2,$$

equivalente a:

$$x^6 - (A_1^2 - 2A_2)x^4 + (A_2^2 - 2A_1A_3)x^2 - A_3^2 = 0$$

Pondo, agora, $x^2 = y$, vê-se que a equação obtida

$$(4) \qquad y^3 - (A_1^2 - 2A_2)y + (A_2^2 - 2A_1A_3)y - A_3^2 = 0$$

tem como raízes x_1^2, x_2^2, x_3^2. A equação (4) é chamada a *transformada de Gräffe* da equação (3). E é evidente que nada nos impede de continuar a usar em (4) a letra *x* em vez de y como incógnita.

Posto isto, podemos proceder para (4) como se fez para (3): a transformada de Gräffe de (4) terá como raízes x_1^4, x_2^4, x_3^4. Por sua vez, a transformada de Gräffe desta terá como raízes x_1^8, x_2^8, x_3^8. E assim sucessivamente. Dum modo geral, sendo p um número natural qualquer, ao fim de p operações deste tipo, obtém-se a *transformada de Gräffe de ordem* p da equação (3) e essa transformada tem como raízes

$$x_1^n,\ x_2^n,\ x_3^n \quad , \quad \text{sendo } n = 2^p$$

Como se vê, podemos assim alcançar muito rapidamente valores elevados de n. Por outro lado, a *uniformidade mecânica do processo* torna-o facilmente adaptável ao cálculo automático.

Se, em vez de uma equação do 3.º grau, tivermos uma do 4.º grau,

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$

a transformada de Gräffe será:

$$x^4 + A_1^{(2)}x^3 + A_2^{(2)}x^2 + A_3^{(2)}x + A_4^{(2)} = 0$$

com $A_1^{(2)} = -A_1^2 + 2A_2$, $A_2^{(2)} = A_2^2 - 2A_1A_3 + 2A_4$, $A_3^{(2)} = -A_3^2 + 2A_2A_4$, $A_4^{(2)} = A_4^2$. E analogamente para as equações de grau superior ao quarto. As restantes considerações são também perfeitamente análogas às que fizemos para as equações do 3.º grau, excepto no que se refere a raízes imaginárias; para estas, o cálculo das partes real e imaginária, uma vez conhecido o módulo, torna-se mais complicado quando aumenta o grau da equação. São conhecidos diferentes processos para este último cálculo.

EXEMPLOS:

I. *Calcular as raízes da equação* $x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = 0$, *com 7 algarismos exactos.*

Este problema, como todos os que, neste volume, exigem cálculo automático, foi resolvido na Divisão de Mecânica Aplicada do L.N.E.C.

As sucessivas transformadas de Gräffe, fornecidas pelo computador até à ordem que pareceu conveniente, foram as seguintes:

$$x^3 + 8x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x^3 + 88x^2 - 112x + 256 = 0$$

$$x^3 + 7968x^2 - 32512x + 65536 = 0$$

$$x^3 + 6{,}3554048 \cdot 10^7x^2 + 1{,}2648448 \cdot 10^7x + 4{,}2949673 \cdot 10^9 = 0$$

$$x^3 + 4{,}0391170 \cdot 10^{15}x^2 - 5{,}4576513 \cdot 10^{17}x + 1{,}8446744 \cdot 10^{19} = 0$$

$$x^3 + 1{,}6314466 \cdot 10^{31}x^2 + 1{,}4884247 \cdot 10^{35}x + 3{,}4028237 \cdot 10^{38} = 0$$

Nas três últimas os coeficientes apresentam o aspecto com que foram *lidas* na resposta do computador(1).

Note-se que, a partir da 4.ª transformada, os valores dos coeficientes já não são exactos, porque a máquina só fornece directamente 8 *algarismos exactos. Daqui* resultam *erros de arredondamento,* que se vão acumulando, mas que são depois compensados em grande parte nas extracções de raiz.

De acordo com o que foi dito atrás, as equações anteriores têm como raízes as potências das raízes x_1, x_2, x_3 da proposta, com os expoentes 2, 4, 8, 32, 64 e 128, respectivamente.

Efectuando as extracções de raízes com estes índices, conforme foi indicado, a máquina forneceu as seguintes sequências de valores aproximados para $|x_1|$, $|x_1 x_2|$ e $|x_1 x_2 x_3|$:

$\lvert x_1 \rvert$	$\lvert x_1 x_2 \rvert$	$\lvert x_1 x_2 x_3 \rvert$
2,8284271	3,4641016	4
3,0628143	3,2531531	4
3,0737509	3,6644218	4
3,0739475	2,7789282	4
3,0739475	3,5832857	4
3,0739475	3,5446541	4

Como era de esperar, os valores obtidos para $|x_1 x_2 x_3|$ são *exactos,* todos iguais a 4 *(porquê?).*

---

(1) No papel escrito à máquina pela teleimpressora, cada número é dado por uma dízima de 8 algarismos, com parte inteira maior que 0 e menor que 10, e pela *característica* de logarítmo do número, isto é, pelo expoente (positivo, negativo ou nulo) da potência de 10 pela qual deve ser multiplicada a dízima; esta aparece precedida do sinal — se o número é negativo. Por exemplo, a expressão—3.2512037⊙04 representa o número $-3{,}2512037 \times 10^4 = -32512{,}037$, enquanto a expressão 7.3025609⊙—37 representa o número $7{,}3025809 \times 10^{-37}$.

Na 1.ª coluna, os 8 algarismos fornecidos pela máquina estabilizaram-se logo a partir do 4.º termo: há, portanto, *sinais evidentes de convergência,* que levam a concluir que x_1 é raiz real.

Na 2.ª coluna, não se observa qualquer *sintoma de convergência,* o que sugere o seguinte *diagnóstico*: as raízes x_2, x_3 devem ter módulos iguais e *são provavelmente imaginárias.* Esta hipótese é confirmada pelo facto de nem sequer haver estabilidade no sinal do coeficiente de x das transformadas de Gräffe.

Vejamos, agora, qual o sinal de x_1. Substituindo o último valor aproximado de $|x_1|$ no 1.º membro da equação proposta, obtém-se:

$$f(3{,}0739475) = -\,0{,}00000013$$

O valor assim obtido (chamado *resíduo*) é tão próximo de zero, que não restam dúvidas sobre a conclusão: a raiz x_1 é positiva e tem-se, com 8 *algarismos exactos:*

$$x_1 = 3{,}0739475 \ (^1)$$

Posto isto, para terminar o cálculo de x_2 e de x_3, basta observar que se tem $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, donde:

$$x_2 + x_3 = 2 - 3{,}0739475 = -\,1{,}0739475$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = -\,0{,}5369738 \text{ (parte real de } x_2 \text{ e } x_3\text{) e,}$$

por outro lado, $x_1 x_2 = \dfrac{4}{3{,}0739475} = 1{,}3012584$

---

(1) Note-se que o facto de x_1 ser positivo podia já concluir-se *a priori* do facto de x_2 e x_3 serem imaginárias conjugadas (portanto $x_1 x_2 > 0$) e de ser $x_1 x_2 x_3 = 4 > 0$.

Portanto, a parte imaginária de x_2 e x_3 será:

$$x_2 - x_3 = i\sqrt{x_2 x_3 - \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2} = 1{,}006438\,i$$

Assim obtemos, finalmente, com 7 *algarismos exactos:*

$$x_2 = -\,0{,}5369738 + 1{,}006438\,i$$

$$x_3 = -\,0{,}5369738 - 1{,}006438\,i$$

sendo o resíduo, para ambos estes valores:

$$0{,}00000001 - 0{,}00000005\,i$$

O tempo total de cálculo na máquina para este problema foi de cerca de 4 minutos. No entanto, se a máquina tivesse recebido ordem para fornecer unicamente os resultados finais no cálculo dos módulos, o tempo teria sido muito menor.

II. Seja agora a equação $x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$. Neste caso, o computador recebeu ordem para fornecer directamente os valores aproximados de $|x_1|$, $|x_2|$ e $|x_3|$, que foram os seguintes:

$\lvert x_1\rvert$	$\lvert x_2\rvert$	$\lvert x_3\rvert$
3,7416574	1,7113069	0,78086881
3,2675799	1,7127384	0,89341400
3,2014124	1,7134676	0,91149119
3,1987004	1,7135375	0,91222681
3,1986912	1,7135379	0,91222918
3,1986912	1,7135379	0,91222918

Manifesta-se, pois, convergência nas três sucessões (aliás, a máquina podia também ter recebido ordem para fornecer apenas os valores com os algarismos estabilizados).

Quanto a sinais, verificou-se que x_1 e x_2 são positivos e x_3 negativos, tendo-se:

$x_1 = 3{,}1986912$	com o resíduo	$-0{,}00000010$
$x_2 = 1{,}7135379$	» » »	$-0{,}00000004$
$x_3 = -0{,}91222918$	» » »	$-0{,}00000001$

III. Seja a equação

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = 0$$

Neste caso, o computador forneceu os seguintes valores das raízes, até à ordem decimal indicada:

$x_1 = 2{,}2360680$ (resíduo: $0{,}00000091$)

$x_2 = -2{,}2360680$ (resíduo: $0{,}00000043$)

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = -0{,}50000000 + 0{,}86602540\,i \\ x_4 = -0{,}50000000 - 0{,}86602540\,i \end{array}\right\} \text{resíduo: } -(4+i)\ 10^{-8}$$

Aliás, pode verificar-se que se tem *exactamente*, neste caso:

$$x_1 = \sqrt{5}\ ,\ x_2 = -\sqrt{5}\ ,\ x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

e a razão é simples: o 1.º membro da equação foi construído ***propositadamente*** como produto de $x^2 - 5$ por $x^2 + x + 1$. Mas note-se que coincidências como esta são extremamente raras na prática, em que os coeficientes provêm de dados empíricos.

NOTA IMPORTANTE. Há métodos semelhantes ao de Gräffe que permitem calcular directamente os valores das raízes, *sem passar pelo cálculo dos módulos,* o que os torna mais expeditos.

O método de Gräffe e outros congéneres são pouco satisfatórios, quando há raízes com módulos *aproximadamente* iguais (mas não *exactamente* iguais). Nesses casos, há que utilizar, por exemplo, *métodos iterativos*. Deve notar-se que, além do método de Newton para o cálculo das raízes reais, há também métodos iterativos para o cálculo das raízes imaginárias. Mas importa, desde já, que a seguinte ideia fique bem gravada no espírito do aluno:

Em matemática aplicada, e nomeadamente no cálculo numérico, não há métodos universais que sejam igualmente eficazes para todos os casos: *o melhor método para um caso não é, muitas vezes, o melhor para outro*. A matemática pura está para a matemática aplicada, de certo modo, como a medicina está para a clínica, sendo uso dizer-se neste último caso: *não há doenças, há doentes*. Aqui, a lógica tem de ser, muitas vezes, compensada com a intuição: *a ciência torna-se arte*.

§ 3. LIMITES DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL

34. **Conceitos e propriedades elementares.** Neste ponto, deverá tomar-se como texto-base o *Compêndio de Álgebra,* no Capítulo V. A definição de 'limite de uma função', dada na p. 188 desse *Compêndio,* pode agora ser esclarecida por meio da lógica simbólica(1).

Seja f uma função real de variável real. Trata-se de definir o significado da frase:

$$f(x) \textit{ tende para } b \textit{ quando } x \textit{ tende para } a$$

que se escreve, abreviadamente:

$$f(x) \to b \textit{ quando } x \to a$$

sendo *a* e *b* constantes, finitas ou infinitas.

Esta expressão tem um sentido bastante intuitivo, ligado à *ideia*

---

(1) As considerações que vão seguir-se dirigem-se mais propriamente ao professor, para orientação didáctica. Mas devem também ser aconselhadas como leitura aos alunos mais interessados.

de movimento, sentido esse que se pode traduzir mais directamente, lendo a expressão do seguinte modo:

$f(x)$ *aproxima-se de* b, *quando* x *se aproxima de* a,

ou ainda deste modo:

Quando x *vai para* a, f(x) *vai para* b.

Esta *intuição* de carácter dinâmico é muito valiosa e convém, por isso, mantê-la sempre viva no espírito, utilizando com frequência as referidas maneiras de dizer. Mas, em matemática, não basta a intuição: é preciso definir os conceitos com *rigor lógico,* para podermos sobre eles raciocinar com inteira segurança.

Note-se que, nas frases anteriores, a conjunção 'quando' equivale à condicional 'se', que se traduz pelo símbolo $\Leftarrow$. Portanto, interpretada à letra, a expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' traduz-se simbolicamente por:

$$f(x) \to b \Leftarrow x \to a$$

ou, o que é equivalente, por:

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to b$$

Mas, as expressões '$x \to a$' e '$f(x) \to b$', consideradas *isoladamente,* não têm qualquer significado que não seja aquele intuitivo, ligado à ideia de movimento. Com rigor lógico, só definimos, até agora, o significado de expressões do tipo $u_n \to a$, em que u_n é o termo geral de uma sucessão. Ora, a maneira de dizer intuitiva:

x *aproxima-se de* a,

pode ser interpretada deste modo:

x *toma uma sucessão de valores tendentes para* a,

ficando subentendido que esses valores são *todos distintos de* a.

Assim, finalmente, a expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' vem a ser definida como abreviatura da seguinte:

$$u_n \to a \wedge u_n \neq a \; (\forall n) \Rightarrow f(u_n) \to b$$

e é isso mesmo o que diz a definição 1 da p. 188 do dito *Compêndio de Álgebra*.

Subentende-se, é claro, que a implicação (2) é *formal*, isto é, deve verificar-se qualquer que *seja* a sucessão u_n considerada (supondo que os valores desta pertencem todos ao domínio de f).

NOTA. Se em vez da notação u_n usarmos a notação $\varphi(n)$, o significado da expressão '$f(x) \to b$ *quando* $x \to a$' será dado mais precisamente pela seguinte:

$$\varphi \to a \wedge \varphi(n) \neq a \; (\forall n \in \mathbb{N}) \underset{\varphi}{\Rightarrow} f o \varphi \to b$$

que é, como sabemos, uma abreviatura desta outra:

$$\forall \varphi : \varphi \to a \wedge \varphi(n) \neq a \; (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f o \varphi \to b$$

Aqui, as variáveis *n* e φ são de *tipos diferentes:* o domínio da primeira é $\mathbb{N}$; o da segunda é o conjunto de *todas as sucessões de números reais* (aplicações de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$) *cujos termos pertencem a* D_f.

Assim, a anterior noção intuitiva acabou por ser completamente *logificada* (ou *formalizada*). Mas observe-se como foi profunda, neste caso, a evolução que se deu no sentido da *intuição para a lógica*.

35. **Definição de 'limite de uma função' segundo Cauchy*.** Como vimos, a anterior definição de limite de uma função de variável real faz intervir a noção anterior de 'limite de uma sucessão'. Mas tal definição, cuja ideia se atribui a Heine, pode ser substituída por uma definição directa, devida a Cauchy. *Bastará considerar aqui o caso em que* a *e* b *são finitos (números reais).* Neste caso, a expressão intuitiva:

f(x) *aproxima-se de* b, *quando* x *se aproxima de* a

pode ser interpretada do seguinte modo:

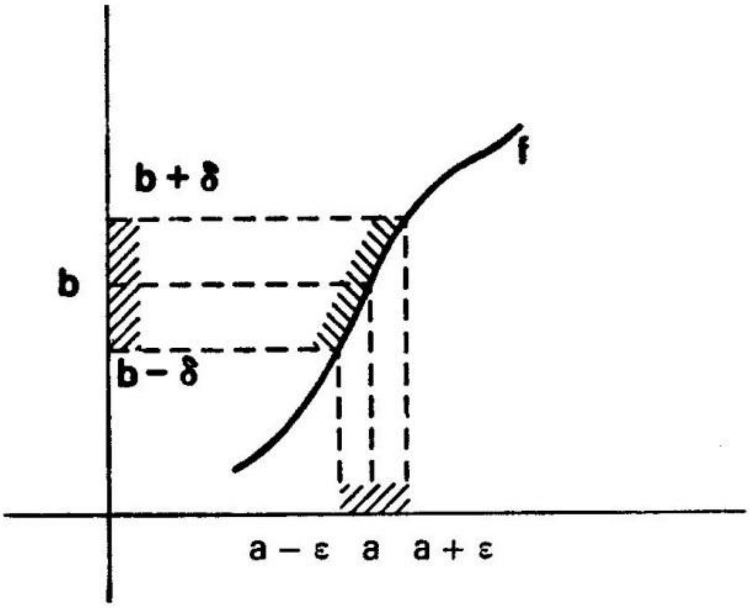
Por menor que seja o número positivo δ*, existe um número positivo* ε*, tal que* f(x) *está na vizinhança* (δ) *de* b *quando* x *está na vizinhança* (ε) *de* a.

Se a isto juntarmos a condição $x \neq a$, temos finalmente a definição de Cauchy, com *a* e *b* finitos:

DEFINIÇÃO. Diz-se que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, sse:

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x)-b| < \delta$$

A figura junta ajuda a esclarecer esta definição



Quanto à intervenção da condição $x \neq a$, esta só ficará inteiramente clarificada quando se tratar da noção de continuidade.

Resta saber se a definição de Cauchy é equivalente à anterior (de Heine). Vamos ver que sim.

1.ª parte. Suponhamos que a proposição

(1) $$f(x) \to b \text{ quando } x \to a$$

é verdadeira segundo Cauchy. Queremos provar que também é verdadeira segundo Heine; isto é: sendo u_n uma sucessão *qualquer* de números reais distintos de a (pertencentes a D_f) tal que $u_n \to a$, trata-se de provar que $f(u_n) \to b$. É o que vamos fazer.

Seja δ um número positivo *arbitrário.* Então existe um número positivo ε tal que

$$|u_n - a| < \varepsilon \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta \qquad \textit{(porquê?)}$$

Por outro lado, como $u_n \to a$, existe um número p tal que

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \varepsilon \qquad \textit{(porquê?)}$$

Logo

$$n > p \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$$

E, como δ pode ser um número positivo *qualquer*, isto significa que $f(u_n) \to b$ e que, portanto, a proposição (1) é verdadeira segundo Heine.

2.ª parte. *Suponhamos que a proposição* (1) *é verdadeira segundo Heine*. Queremos provar que também é verdadeira segundo Cauchy; é, isto que:

$$(2) \qquad \forall \delta > 0,\ \exists\ \varepsilon > 0\colon\ |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - b| < \delta$$

Vamos prová-lo por *redução ao absurdo*. Suponhamos que a proposição (2) é *falsa*, isto é, suponhamos o seguinte:

Existe pelo menos um $\delta > 0$ tal que:

$$(3) \qquad \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\, x : |x-a| < \varepsilon \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geqslant \delta$$

Seja então δ_0 um número positivo que verifique esta condição e seja *n* um número natural *qualquer*. Como $1/n > 0$, conclui-se de (3), com $\varepsilon = 1/n$, que *existe pelo menos um* x tal que

$$(4) \qquad |x-a| < \frac{1}{n} \wedge x \neq a \wedge |f(x) - b| \geqslant \delta_0$$

Seja x_n um determinado valor de x que verifique esta condição, *escolhido arbitrariamente* (pode haver mais de um!). Assim, a cada $n \in \mathbb{N}$, fizemos corresponder um (e um só!) número real x_n que verifica as três condições seguintes:

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad , \quad x_n \neq a \quad , \quad |f(x_n) - b| \geqslant \delta_0 \qquad (\forall n)$$

Da primeira deduz-se:

(5) $$x_n \to a \qquad \textit{(porquê?)}$$

Da terceira deduz-se:

(6) $$f(x_n) \not\to b \qquad \textit{(porquê?)}$$

E, como $u_n \neq a$ para todo o *n*, conclui-se que ***a proposição***

$$f(x) \to b \text{ quando } x \to a$$

é falsa segundo Heine. Mas isto é contra a hipótese. Fica, portanto, provado o que pretendíamos.

36. **Axioma de Zermelo*.** Na 2.ª parte da demonstração anterior admitimos implicitamente que é possível fazer corresponder a cada $n \in \mathbb{N}$ um *determinado* valor x_n de x que verifique (4), escolhido entre *vários possíveis*. Por outras palavras, admitimos o seguinte:

E possível efectuar uma infinidade de escolhas, independentes umas das outras, para definir a sucessão u_n *como foi indicado.*

Mas, pergunta-se: Como pode uma pessoa — mesmo que vivesse uma eternidade — efectuar *completamente* uma infinidade de escolhas independentes? (Por '*escolhas independentes*' entende-se aqui 'escolhas que não fiquem *predeterminadas*, a partir de certa ordem, por um processo qualquer'.)

Muitos matemáticos tinham admitido implicitamente essa possibilidade, em várias demonstrações, *sem se aperceberem de tal.* Mas bastou que o matemático ZERMELO (hebreu alemão) formulasse explicitamente pela primeira vez essa possibilidade, *como axioma da lógica* (o famoso AXIOMA DA ESCOLHA), para que se levantasse um imenso coro de protestos. Zermelo defendeu-se então dizendo que *a possibilidade admitida por esse axioma era puramente ideal* e deu ao seu axioma a seguinte forma *lógica,* sem qualquer intervenção de conceitos *psicológicos:*

AXIOMA DE ZERMELO. *Qualquer que seja a família* $\mathcal{F}$ *de conjuntos não vazios (finita ou infinita), existe pelo menos uma aplicação* φ *que faz corresponder a cada conjunto* X *de* $\mathcal{F}$ *um determinado elemento* x *desse mesmo conjunto, isto é, uma função* φ *tal que*

$$\varphi(X) = x \in X \quad , \quad \forall X \in \mathcal{F}$$

A esta função φ podemos chamar '*operador de escolha*', visto que tal função *escolhe (ou selecciona),* por assim dizer, em cada conjunto X, *um e um só elemento* x desse conjunto.

Por exemplo, se cada conjunto X da família $\mathcal{F}$, é o conjunto das cidades de um mesmo país, o operador de escolha pode ser o que faz corresponder a X a capital desse país. Neste caso, *a família* $\mathcal{F}$ *é finita* e muitas outras funções de escolha podem ser definidas.

Se $\mathcal{F}$ é o conjunto de *todos* os segmentos de recta do espaço, $\mathcal{F}$ é *infinito* e um operador de escolha pode ser, por exemplo, o que é definido pela expressão 'ponto médio de'. E é claro que, *uma vez escolhido um referencial cartesiano,* muitos outros operadores de escolha podem ser definidos para esta família.

Se $\mathcal{F}$ é a família de todos os conjuntos não vazios de números naturais, isto, é se $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a função de escolha pode ser, por exemplo, definida assim:

$$\varphi(X) = \text{o menor elemento de } X \qquad (\forall X \in \mathcal{F})$$

Mas note-se, agora, o seguinte facto importante:

Se $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *não existe nenhum operador de escolha conhecido, e admite-se que nunca venha a ser possível definir algum.*

No caso da demonstração do número anterior (2.ª parte) a família $\mathcal{F}$ é constituída pelos conjuntos X_n assim definidos:

$$X_n = \{ x : |x-a| < \frac{1}{n} \wedge x \neq a \wedge |f(x)-b| \geqslant \delta_0 \} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ora, *no caso geral* (sendo f uma função *qualquer*), não se conhece nenhum operador φ tal que:

$$\varphi(X_n) = x_n \in X_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas a resposta de Zermelo, quando lhe eram apresentadas objecções deste tipo, pode resumir-se nas seguintes palavras:

Há muitas coisas que existem e que nós não conhecemos nem viremos a conhecer.

Este mesmo ponto de vista foi claramente expresso por HADAMARD nos seguintes termos:

Il y a bien des choses que nous ne pouvons jamais connaitre et qui, cependant, existent «en soi», indépendammant de la capacité humaine de les décrire, indépendamment l'activité de notre espirit et indépendamment même de l'existence de l'homme sur la Terre.

Mas, aqui, levantou-se uma viva polémica, de carácter filosófico, entre diversos matemáticos, que se dividiram em duas correntes principais:

1) A corrente dos *matemáticos idealistas* (ou *platónicos*), caracterizada essencialmente pela aceitação do anterior ponto de vista de Hadamard.

2) A corrente dos *matemáticos empiristas* (ou *positivistas*), que não aceitam a referida posição[1].

Para estes últimos, a expressão: *Existe pelo menos um ente ... tal que ...* significa o seguinte:

É possível determinar (ou *definir) um ente ... tal que ...*

---

(1) Sendo a matemática, por assim dizer, a essência do *racionalismo*, em oposição ao *empirismo*, pode parecer que a designação 'matemático empirista' seja contraditória em si mesma. Note-se, porém, que racionalismo e empirismo são duas atitudes *complementares*, e portanto *inseparáveis*, do nosso espírito, predominando uma ou outra conforme as pessoas e as situações. Já sabemos que a matemática não é *só lógica, só racionalismo*. Da conciliação *dialéctica, dinâmica*, das duas tendências, é que pode resultar progresso. E note-se que a palavra 'empirismo' não é tomada na acepção vulgar pejorativa (ver NOTA HISTÓRICA do Cap. IV do *Compêndio de Álgebra*).

Por exemplo, a proposição:

$$\exists x \in \mathbb{C} : x^8 + 3x^2 + 1 = 0,$$

significa:

É possível determinar (com a aproximação que se queira) um número complexo que verifique a equação $x^8 + 3x^2 + 1 = 0$.

O TEOREMA DE D'ALEMBERT (1.º volume, 2.º tomo, Cap. VI, p. 155) afirma precisamente que *toda a equação algébrica de coeficientes em* $\mathbb{C}$ *e de grau* $n \geqslant 1$ *tem, pelo menos, uma solução em* $\mathbb{C}$. Mas, as demonstrações mais frequentes (e mais simples) deste teorema são feitas pelo *método de redução ao absurdo* — e, por isso, tais demonstrações não são *construtivas,* isto é, não fornecem nenhum *método para o cálculo da solução (ou das soluções)*. Ora bem:

Os matemáticos empiristas não admitem como válidas demonstrações de existência que não sejam construtivas.

Entre as demonstrações não construtivas figuram:

1) As que recorrem ao método de redução ao absurdo, baseado no PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO.

2) As que recorrem ao AXIOMA DE ZERMELO.

Deste modo, o princípio do terceiro excluído e o axioma de Zermelo não foram aceites como *axiomas da lógica,* pelos matemáticos positivistas. Na Holanda, foi fundada por Brouwer uma escola (1) que tem vindo a desenvolver uma nova lógica e uma

(1) Chamada *'escola intuicionista'*.

nova matemática, não baseadas nesses princípios. Mas, embora essa escola tenha conduzido a resultados de real interesse, a verdade é que, por outro lado, põe entraves excessivos ao progresso da matemática. Vendo bem, as demonstrações não construtivas podem ser bastante cómodas e úteis, *numa primeira fase da investigação.*

Por exemplo, as demonstrações não construtivas do TEOREMA DE D'ALEMBERT servem habitualmente para demonstrar a validade de vários *métodos de cálculo das raízes,* tais como o *método de Gräffe* (ver n.º 33, pp. 117-128) e outros mais.

Em dado momento, havia muitos matemáticos que aceitavam o princípio de terceiro excluído, mas não o axioma de Zermelo — o que é, na verdade, um tanto ou quanto contraditório.

Hoje, pode dizer-se, a maioria dos matemáticos aceita os dois princípios como *hipóteses cómodas de trabalho,* admitindo que é indispensável um certo grau de idealização platónica, para não cair num positivismo demasiado restritivo da actividade criadora do espírito.

NOTA. A vida de Zermelo foi tristemente atribulada pela polémica, nem sempre correcta, que se levantou à volta do princípio que tem o seu nome, e depois, mais tarde, pelas perseguições que sofreu, em consequência da sua origem hebraica. Tal como Cantor [*o fundador da TEORIA DOS CONJUNTOS* (1845-1918), também judeu alemão, que sofreu graves dissabores por causa das críticas sarcásticas suscitadas inicialmente pelos *paradoxos* da sua teoria], Zermelo passou grande parte dos últimos anos da sua vida em estado de perturbação mental. Faleceu em Freiburg em 1953.

Têm sido encontradas várias proposições importantes, equivalentes ao axioma da escolha, algumas delas formuladas pelo próprio Zermelo.

37. **Exemplos de limites de funções circulares e das funções exponencial e logarítmica.** Neste momento, já são conhe-

cidas do aluno as funções circulares e as funções exponencial e logarítmica, que fornecem exemplos importantes de limites.

Comecemos pela função *seno*. Desde logo se vê intuitivamente o seguinte:

Quando $x \to +\infty$, *a função* sen x *não tende para limite algum, finito ou infinito, visto que oscila sempre entre* 1 *e* -1.

Logicamente, podemos demonstrar este facto, considerando por exemplo as duas seguintes sucessões:

$$u_1 = 0 \ , \ u_2 = \pi \ , \ u_3 = 2\pi \ , \ \dots \ , \ u_n = (n-1)\pi \ , \ \dots$$

$$v_1 = \frac{\pi}{2} \ , \ v_2 = \frac{5\pi}{2} \ , \ v_3 = \frac{9\pi}{2} \ , \ \dots \ , \ v_n = \frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi \ , \ \dots$$

Qualquer destas sucessões tende para $+\infty$, como é fácil ver, e, no entanto:

$$\text{sen } u_n = 0 \ (\forall n), \text{ portanto sen } u_n \to 0$$

$$\text{sen } v_n = 1 \ (\forall n), \text{ portanto sen } v_n \to 1$$

Daqui se conclui que sen x não tende para limite algum quando $x \to +\infty$.

Analogamente se vê que *não existe limite de* sen x *quando* $x \to -\infty$, *e o mesmo para* cos x *quando* $x \to +\infty$ *ou* $x \to -\infty$.

Passemos, agora, à função *tangente*. A representação da tangente por meio do círculo trigonométrico mostra que:

A função tg x *tende para* $+\infty$ *quando* x *tende para* $\pi/2$, *por valores menores que* $\pi/2$ *e tende para* $-\infty$ *quando* x *tende para* $\pi/2$ *por valores maiores que* $\pi/2$; *isto é:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi-}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to \frac{\pi+}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

ou ainda:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi-}{2} = +\infty \quad , \quad \operatorname{tg} \frac{\pi+}{2} = -\infty$$

Analogamente para todos os pontos $\frac{\pi}{2} + n\pi$ e para a função *cotangente,* nos pontos $n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Seja agora a função a^x, com $a > 0$. Comecemos por supor $a > 1$. Então, segundo vimos no n.º 30, p. 99, tem-se:

$$\lim a^n = +\infty,$$

sendo *n* a variável natural. Mas, como a função a^x é crescente, facilmente se deduz daqui que, sendo u_n uma sucessão *qualquer tendente para* $+\infty$, será:

$$\lim a^{u_n} = +\infty$$

Por conseguinte:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \text{se} \quad a > 1}$$

Por outro lado, notando que $a^{-x} = 1/a^x$, conclui-se daqui que

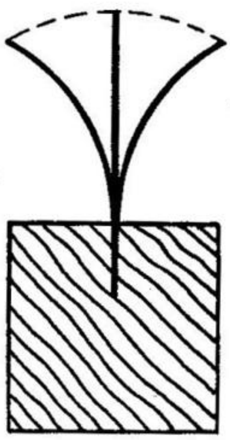
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad , \quad \text{se} \quad a > 1}$$

Se $a < 1$ (sendo $a > 0$), a^x tende para 0 ou para $+\infty$, conforme $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Também, agora, é fácil reconhecer que:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty \quad \text{se} \quad a > 1.$$

(Convém rever, agora, os gráficos das funções 2^x e $\log_2 x$.)



Como aplicação concreta dos resultados obtidos, consideremos o caso de uma lâmina cravada num taco de madeira e que é afastada ligeiramente da posição normal. Como é sabido, uma vez abandonada à força que a solicita para a posição normal, a lâmina segue um movimento que, *em primeira aproximação,* podemos considerar *rectilíneo* e *vibratório simples,* isto é, definido pela equação:

$$x = a \cos \omega t,$$

em que t é o tempo contado a partir do instante inicial, x a distância da ponta da lâmina à posição normal no instante t (com o sinal + ou − conforme está no lado inicial ou no outro), *a* a *amplitude* do movimento, isto é, a distância máxima à posição normal e ω a *pulsação,* isto é, $\omega = 2\pi/T$, sendo T o tempo de uma oscilação completa (período).

Assim, como se vê, *a* e ω são constantes, e x é uma função de t. Ora, pelo que se viu atrás, x não tende para limite algum quando $t \to +\infty$: a lâmina oscila *eternamente* entre as mesmas posições extremas.

Mas nós sabemos que, na realidade, as coisas não se passam assim: a resistência de ar *amortece* cada vez mais as oscilações. Em *segunda aproximação,* a lâmina segue então um *movimento vibratório amortecido,* que é definido por uma equação do tipo

$$x = e^{-kt}\, a \cos \omega t$$

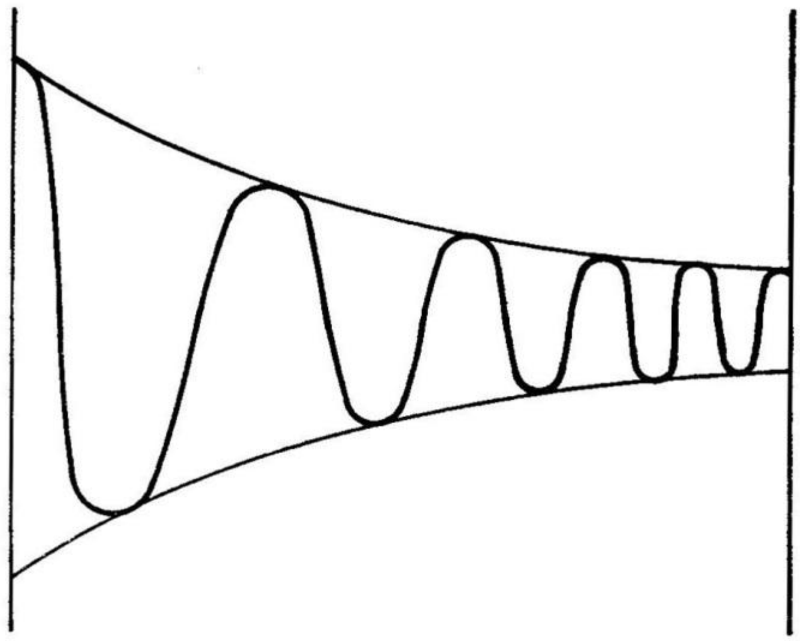
em que k é uma constante positiva (coeficiente de amortecimento). Como $|\cos \omega t| \leqslant 1$ para todo o *t,* vê-se que:

$$|x| \leqslant a\, e^{-kt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

E, como $e^{-kt} \to 0$ quando $t \to +\infty$, conclui-se:

$$x \to 0 \text{ quando } t \to +\infty$$

Quer dizer: a amplitude das oscilações é cada vez mais pequena, *tendendo para zero, quando* $t \to +\infty$. *Teoricamente,* o valor de x nunca se torna *definitivamente nulo,* isto é, a lâmina *nunca pára em absoluto.* Todavia, na *prática,* chega um momento em que o movimento se pode considerar definitivamente terminado.



A figura junta descreve o fenómeno: são indicados, por um lado, os gráficos das funções ae^{-kt}, $-a\,e^{-kt}$ e, por outro lado, o gráfico da função $a\,e^{-kt}\cos\omega t$.

Recordemos, a propósito, que os *modelos matemáticos são sempre esquemas, isto é, descrições simplificadas (ou aproximadas) da realidade, pois seria impossível uma descrição exacta.* Aliás, é sabido que a própria lâmina não é constituída por uma porção *contínua* de matéria, mas antes por uma espécie de *nevoeiro de átomos,* que estão em perpétuo movimento uns em relação aos outros.

38. **Indeterminações.** O problema das indeterminações aparece no cálculo dos limites de funções de variável real, tal como já tinha sucedido para as sucessões.

Agora será muito frequente a indeterminação 0/0. Suponhamos, por exemplo, que se trata de achar o limite de

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

quando $x \to 2$. Tentando aplicar o teorema do limite do quociente, é-se conduzido à indeterminação 0/0. Mas o facto de ambos os polinómios $x^2 - 4$ e $x^2 - 5x + 6$ se anularem quando $x = 2$, significa que ambos são divisíveis por $x - 2$. Tem-se então (aplicando a regra de Ruffini ao segundo polinómio):

$$x^2 - 4 \equiv (x-2)(x+2) \quad , \quad x^2 - 5x + 6 \equiv (x-2)(x-3)$$

Portanto

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad \forall x \neq 2$$

E como, no cálculo do limite quando $x \to 2$, *só interessam os valores de* x *distintos de* 2, vem:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-3} = \frac{0}{-1} = 0$$

Exemplos análogos de indeterminações da forma 0/0 ou ∞/∞ aparecem nos exercícios do *Compêndio de Álgebra,* Cap. VI, pp. 198-199 [1].

39. **Funções contínuas.** Quanto às definições e propriedades elementares, pode seguir-se inteiramente o *Compêndio de Álgebra,* Cap. VII. Os professores e os alunos mais interessados poderão analisar a definição directa de 'função contínua', segundo Cauchy:

Diz-se que uma função f é *contínua num ponto* a, sse *a* pertence ao domínio de f e, para todo o $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$, tal que, se *x* é valor aproximado de *a* a menos de ε, então f(x) é valor aproximado de f(a) a menos de δ; isto é, simbolicamente:

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |f(x) - f(a)| < \delta$$

Agora a condição $x \neq a$ não é necessária, visto que a implicação se verifica manifestamente, mesmo quando $x = a$.

Por exemplo, tem-se, qualquer que seja $a > 0$:

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \underset{x}{\Rightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \delta,$$

o que significa que a função $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua em todo o seu

[1] Não vale a pena apresentar casos em que os dois termos da fracção têm raízes múltiplas comuns. O aluno aprenderá depois em Matemáticas Gerais a Regra de *l'Hôpital* que é bastante mais prática.

domínio de existência. Mais geralmente, isto acontece com a função $x \curvearrowright \sqrt[p]{x}$, em que p é qualquer número natural. *E é isso, afinal, o que diz o teorema do n.º 13,* pp. 47-48, *relativo ao cálculo numérico aproximado de uma raiz.*

A noção de função contínua pode estender-se de modo análogo ao caso de funções de mais de uma variável. Consideremos, por exemplo, uma *função* f(x,y) *de duas variáveis reais*. Diz-se que uma tal função é *contínua num ponto* (a,b), sse este pertence ao domínio de f e, além disso:

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a|| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |f(x,y) - f(a,b)| < \delta$$

Por exemplo, sendo *a* e *b* dois números reais quaisquer, tem-se, segundo os teoremas dos n.ºs 5 e 9, relativos ao cálculo numérico aproximado da soma e do produto:

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |(x+y)-(a+b)| < \delta$$

$$\forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ |x-a| < \varepsilon \wedge |y-b| < \varepsilon \underset{x,y}{\Rightarrow} |xy - ab| < \delta$$

o que significa, precisamente, que a soma x + y e o produto xy são funções contínuas de x e y em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Por sua vez, o quociente x/y é função contínua de x e y em todo o seu domínio de existência, que é o complementar da recta y = 0 no plano $\mathbb{R}^2$.

§ 4. DERIVADAS

40. **Conceitos fundamentais e regras de derivação.** Sobre este ponto pode também seguir-se o *Compêndio de Álgebra,* no Cap. VIII. *Quanto à dedução das regras de derivação do produto, do quociente e da raiz, pode agora tirar-se partido do estudo feito no* § 1 *e utilizar as notações* Δx, Δy, Δu, Δv, etc., *atendendo à analogia entre o conceito de desvio e o de acréscimo.*

Assim, consideremos duas funções $u = f(x)$, $v = g(x)$ e um acréscimo Δx dado a x. Sejam Δu e Δv os acréscimos correspondentes de *u* e *v*, isto é:

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \quad , \quad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e ponhamos $fg = \varphi$. Ora, já sabemos que se tem:

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - u\,v$$

$$= u\,\Delta\,v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

donde:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Portanto, em todo o ponto x em que f e g admitem derivada finita, vem, aplicando os teoremas sobre limites:

$$(1) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

visto que $\Delta u \to 0$ *(porquê?)* e $\Delta v/\Delta x$ tende para um limite finito. Mas, lembrando que $u = f(x)$, $v = g(x)$ e $uv = f(x)g(x) = \varphi(x)$, a igualdade (1) escreve-se:

$$\varphi'(x) = f(x)\ g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

ou, abreviadamente:

$$D(uv) = uDv + vDu$$

ou, ainda:

$$(uv)' = uv' + vu' \text{ (}^1\text{)}$$

A extensão a mais de 2 factores faz-se como no *Compêndio de Álgebra*.

---

(1) Estamos aqui a cometer o *abuso de linguagem* que consiste em tratar as *variáveis dependentes* u,v, como se fossem as próprias *funções* f,g. A fórmula correcta seria $(fg)' = fg' + gf'$ ou $D(fg) = fDg + gDf$. Mas o referido abuso de linguagem torna-se inevitável, a partir de certo momento, para não complicar demasiado as notações (principalmente em matemática aplicada). *Apenas quando houver perigo de confusão,* será indispensável utilizar a linguagem correcta.

Quanto à derivada do quociente, basta lembrar que

$$\Delta \frac{u}{v} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v + \Delta v)}$$

Daqui vem, supondo ainda $u = f(x)$, $v = g(x)$:

$$\frac{\Delta \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Portanto, em todo o ponto x em que f e g admitem derivada finita e $g(x) \neq 0$, virá, por passagem ao limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e pondo $f/g = \psi$:

$$\psi'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\;g'(x)}{g(x)^2}$$

visto que $\Delta v \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Em notação abreviada:

$$D\,\frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2}$$

ou, ainda:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Quanto à derivada da raiz, consideremos um número natural n e um número real $x_0 \neq 0$ (positivo se *n* é par). Então virá, para $x \neq x_0$ (cf. n.º 13, pp. 46-47):

$$\frac{x - x_0}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k}(\sqrt[n]{x_0})^{k-1}$$

donde:

$$(2) \qquad \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt[n]{x})^{n-k}(\sqrt[n]{x_0})^{k-1}}$$

Ora, quando $x \to x_0$, $(\sqrt[n]{x})^{n-k} \ (\sqrt[n]{x_0})^{k-1}$ tende para

$$(\sqrt[n]{x_0})^{n-k} \ (\sqrt[n]{x_0})^{k-1} = \sqrt[n]{x_0^{n-1}} \neq 0 \qquad \textit{(porquê?)}$$

e, portanto, o primeiro membro de (2) tende para um limite finito que é:

$$\underset{x=x_0}{D} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

Mais simplesmente, podemos escrever:

$$D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

para todo o $x \neq 0$ (e positivo se n é par). Quanto à fórmula (18) do *Compêndio de Álgebra* (p. 239), subentende-se que a fórmula é aplicável em todo o ponto x em que φ admite derivada finita e tal que $\varphi(x) \neq 0$ (positivo se n é par).

A regra da derivação da função composta pode ser deduzida como no *Compêndio de Álgebra*. Não esquecer, entretanto, a linguagem moderna: se $f(x) \equiv \varphi[\psi(x)]$, diz-se que f é a *função composta de φ com ψ* e escreve-se $f = \varphi \circ \psi$.

Quanto à regra de derivação da função inversa, pode ser deduzida como no *Compêndio de Álgebra*, mas convém tratar desse assunto mais adiante, imediatamente antes da derivada da função logarítmica, em cuja dedução se aplica o referido teorema.

41. **Conceito de diferencial** (1). Seja f uma função que admita derivada finita num ponto x e ponhamos $y = f(x)$. Então, a todo o acréscimo Δx dado a x, corresponde um acréscimo Δy para y e tem-se:

$$(1) \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ponhamos, agora:

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = r$$

---

(1) Antes deste assunto, convirá tratar das *aplicações das derivadas*, segundo o *Compêndio de Álgebra*. Sobre o conceito de diferencial, importa ver o *Guia!*

Será pois r a diferença entre a *razão incremental* e a derivada. Supondo x fixo e Δx variável, r é função de Δx e tem-se, em virtude de (1) e (2):

$$\lim_{\Delta x \to 0} r = 0$$

Ora de (2) vem:

$$\boxed{\Delta y = f'(x) \quad \Delta x + r \Delta x} \tag{3}$$

e tem-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{r \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} r = 0$$

Mas isto quer dizer que $r \Delta x$ *é um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx. Nestas condições, a fórmula (3) diz-nos o seguinte:

O acréscimo Δy *é igual a* $f'(x)\Delta x$, *mais um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx.

Mais ainda, se $f'(x) \neq 0$, tem-se:

$$\frac{r \Delta x}{f'(x) \Delta x} = \frac{r}{f'(x)} \to 0 \quad \text{quando } \Delta x \to 0$$

Donde, atendendo a (3):

$$\boxed{\frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} \to 1 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0}$$

Exprime-se este facto, dizendo que Δy e $f'(x)\Delta x$ são *infinitésimos equivalentes* (isto é, o seu quociente tende para 1). Na prática, isto quer dizer o seguinte:

Quando Δx é bastante pequeno, o termo $r\,\Delta x$ será *muito pequeno em relação a* $f'(x)\,\Delta x$, e portanto desprezável, o que nos permite escrever, em vez de (3), a fórmula seguinte:

$$(3') \qquad \Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

Mas é preciso não esquecer que, em rigor, o acréscimo Δy não é geralmente igual a $f'(x)\,\Delta x$.

Chama-se *diferencial da função* f *no ponto* x o produto $f'(x)\,\Delta x$ da derivada de f em x pelo acréscimo Δx da variável independente. O diferencial de f em x representa-se por $df(x)$ ou simplesmente por dy, se pusermos $y = f(x)$. Será pois, por definição:

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x$$

ou

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

Notemos, desde já, o seguinte: em particular, se for $f(x) \equiv x$, será $f'(x) \equiv 1$ e portanto $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Isto leva-nos a escrever dx em vez de Δx, quando x é a variável independente. Ter-se-á, pois:

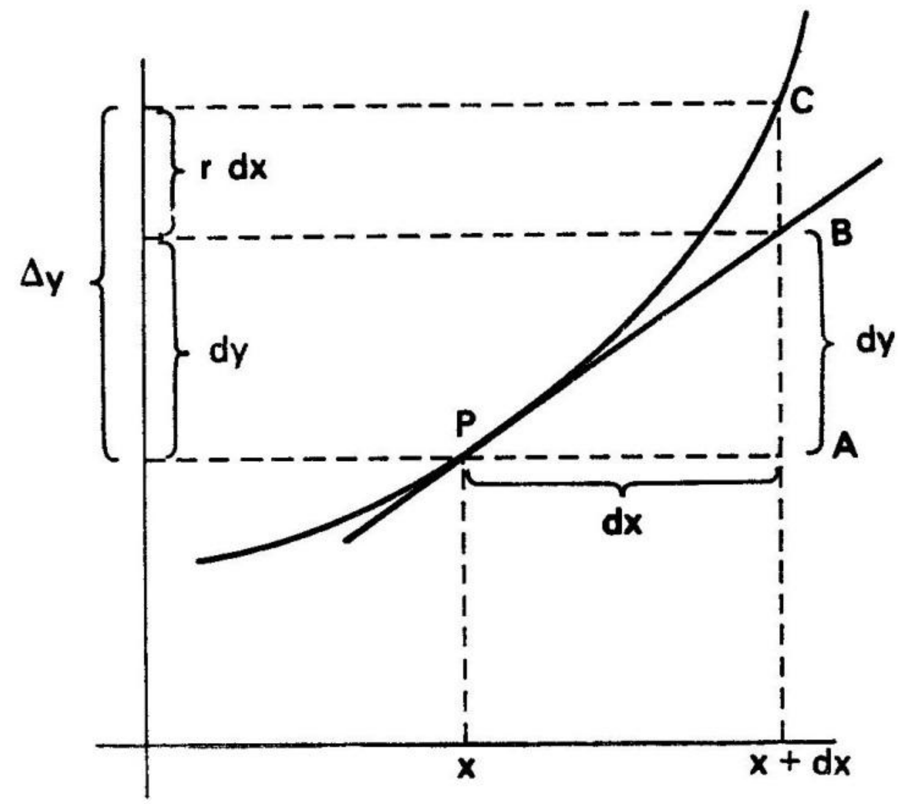
$$\text{(4)} \qquad \boxed{dy = f'(x)dx}$$

E a fórmula (3) diz-nos, agora, o seguinte:

O acréscimo Δy *difere do diferencial* dy *por um infinitésimo de ordem superior à de* Δx *(ou* dx*) e pode escrever-se*

$$\Delta y \approx dy$$

quando dx *é bastante pequeno.*



A figura junta esclarece, por intuição geométrica, o que se acaba de dizer. A recta PB é a tangente ao gráfico da função f no ponto da abcissa x; o seu declive é, portanto, $f'(x)$. Os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AB}$, catetos do triângulo rectângulo [PAB], representam respectivamente dx e dy ($dy = f'(x)dx$), à parte o sinal. O segmento $\overline{AC}$ representa o acréscimo Δy, à parte o sinal. A diferença Δy-dy é assim representada, em valor absoluto, por $\overline{BC}$. Ora vê-se que, quando dx tende para zero, esta diferença entre o acréscimo Δy e o diferencial dy torna-se desprezável em relação a dy.

Assim, a substituição do acréscimo Δy *pelo diferencial* dy *equivale a substituir a curva pela tangente (ou seja, a substituir* f *pela função linear cujo gráfico é a tangente), o que, para valores bastante pequenos de* dx, *não produz erro apreciável.*

Note-se, por último, que a fórmula

$$(4) \qquad dy = f'(x)dx,$$

que define o diferencial, pode escrever-se:

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Assim se explica a *notação* $\frac{dy}{dx}$ *de Leibniz*, para designar *a derivada de* y *em ordem a* x.

Para os precursores do cálculo infinitesimal, os diferenciais eram *infinitésimos actuais* (ou *indivisíveis*) ([1]). Deste modo, a derivada seria o quociente de duas quantidades infinitésimas. Foi Newton,

---

([1]) Reler NOTA IMPORTANTE das pp. 71-72.

ao que parece, quem primeiro concebeu a derivada correctamente, isto é, como limite da razão incremental $\Delta y/\Delta x$, quando $\Delta x \to 0$. No entanto, a fórmula (5) também é correcta, uma vez que se defina dy segundo (4) e não como sendo igual a Δy.

42. **Regras de diferenciação.** O conceito de diferencial, como desde já se pode reconhecer, está intimamente relacionado com o cálculo numérico aproximado. Seja, por exemplo, $f(x) \equiv \sqrt[p]{x}$, em que p é um número natural. Como $df(x) = f'(x)dx$ e

$$f'(x) \equiv \frac{1}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}} ,$$

será:

$$d\sqrt[p]{x} = \frac{dx}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}}$$

Esta é uma fórmula rigorosa, que, como já tínhamos anunciado no n.º 13, substitui a FÓRMULA APROXIMADA DO DESVIO DA RAIZ:

$$(1) \qquad \Delta\sqrt[p]{x} \approx \frac{\Delta x}{p\sqrt[p]{x^{p-1}}} ,$$

Esta pode agora ser interpretada do seguinte modo: *a diferença entre os dois membros de* (1) *é um infinitésimo com* Δx *de ordem superior à de* Δx.

Da definição de diferencial

$$dy = f'(x)dx, \text{ sendo } y = f(x),$$

e das regras de derivação, resultam *regras perfeitamente análogas de diferenciação:*

$$\left.\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv \\ d(uv) &= u\,dv + v\,du \\ d\frac{u}{v} &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \end{aligned}\right\} \text{ com } u = f(x),\ v = g(x)$$

Por exemplo:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du$$

Note-se que as REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO DO PRODUTO E DO QUOCIENTE substituem as FÓRMULAS APROXIMADAS DO DESVIO DO PRODUTO E DO QUOCIENTE (n.os 9 e 11).

Finalmente, convém notar que o conceito de diferencial se estende a funções de mais de uma variável, sendo as regras de diferenciação perfeitamente análogas. No caso particular de uma função $z = f(x,y)$ de duas variáveis, que *verifique certas condições,* tem-se por definição:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

sendo $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ as *derivadas parciais da função,* respectivamente em ordem a x e em ordem a y. A primeira obtém-se derivando f(x,y) em ordem a x *supondo* y *constante*; e a segunda, derivando f(x,y) em ordem a y, *supondo* x *constante*. Por exemplo, se

$$z = \sqrt{x^2 + 3y}$$

tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}$$

e, portanto:

$$(2) \qquad d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}}\, dx + \frac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, dy$$

Este resultado podia ser obtido, aplicando as regras de diferenciação:

$$d\sqrt{x^2 + 3y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, d(x^2 + 3y)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y}}\, (2x dx + 3 dy)$$

Substituindo d por Δ e o sinal $=$ por $\approx$, obtém-se a fórmula aproximada do desvio de $\sqrt{x^2 + 3y}$.

43. O conceito de diferencial nas ciências da natureza [1]**.** Já se viu qual o papel do conceito de diferencial no cálculo numérico

---

(1) Este número é particularmente recomendável *como leitura*, para se compreender bem a *aplicação do cálculo infinitesimal às ciências da natureza*, especialmente à física e à engenharia.

aproximado. É corrente, em questões concretas de matemática relativas às ciências experimentais e à engenharia, usar os diferenciais como se estes fossem os próprios acréscimos das funções. Nisto consistem os chamados 'MÉTODOS ABREVIADOS DE CÁLCULO E RACIOCINIO'. É evidente que tais métodos carecem de rigor, pois, como vimos, ao substituir os acréscimos das funções pelos respectivos diferenciais, cometem-se erros. Mas, na prática, estes erros são desprezáveis, dentro de outros limites, e, nos raciocínios, são compensados por outros erros da mesma ordem, de modo que se chega muitas vezes assim a *resultados válidos*. Os referidos métodos abreviados são, pois, *métodos heurísticos,* isto é, métodos que, embora pouco rigorosos, permitem facilmente *descobrir* factos, que podem depois ser demonstrados logicamente pelos métodos rigorosos da matemática pura. *No fundo, continua a seguir-se o método dos indivisíveis* (pp. 71-72) *com uma só diferença: é que se tem agora consciência da falta de rigor e da necessidade de confirmar posteriormente os resultados à luz da lógica dedutiva.*

Convém, portanto, que o aluno fique desde já prevenido de que irá encontrar, com frequência, no estudo das ciências experimentais nomeadamente na física, raciocínios que deixam muito a desejar do ponto de vista do rigor lógico. A razão é esta: nesses casos, são normalmente usados os referidos métodos abreviados de carácter heurístico, e não há tempo para fazer demonstrações rigorosas, que são muitas vezes longas ou mesmo complicadas. Estas competem aos matemáticos.

Na NOTA HISTÓRICA do Cap. V do *Compêndio de Álgebra,* mostra-se como tal método pode ser usado para *descobrir* a fórmula da área do círculo. De modo análogo se pode *descobrir* a fórmula que dá o volume da esfera (supondo já conhecidas as que dão a área da esfera e o volume do cone).

Outros exeploms:

a) Já sabemos que, num movimento de equação $s = f(t)$, a velocidade, em cada instante t, é a derivada $f'(t)$ do espaço em ordem ao tempo, derivada que também se representa por ds/dt. Pois em linguagem abreviada raciocina-se deste modo: num intervalo de tempo infinitésimo $[t, t + dt]$, o movimento pode considerar-se *uniforme*; logo, a velocidade v nesse intervalo (e, portanto, no instante t) é o quociente do espaço percorrido

$$ds = f(t + dt) - f(t)$$

pelo tempo dt, isto é, $v = ds/dt = f'(t)$.

Ora, nesse raciocínio há dois erros: 1.º, supõe-se constante a velocidade no intervalo $[t, t + dt]$; 2.º, substitui-se o *acréscimo* $\Delta s = f(t + dt) - f(t)$ pelo *diferencial* ds. Mas é claro que os dois erros se compensam e o resultado está certo ([1]).

b) A quantidade de electricidade Q que passa numa dada secção dum fio condutor durante um tempo t é função de t:

$$Q = f(t)$$

Num intervalo infinitésimo $[t, t + dt]$, a quantidade de electricidade escoada, $dQ = f(t + dt) - f(t)$, é também infinitésima e pode considerar-se *proporcional* ao tempo dt. A constante de proporcionalidade, que representaremos por I, chama-se *intensidade de corrente no instante* t. Tem-se, pois:

$$I = \frac{dQ}{dt} = f'(t)$$

([1]) Aqui 'infinitésimo' significa 'muito pequeno'; mas já sabemos que, em rigor, 'infinitésimo' significa 'tendente para zero'.

Mas, em geral, I varia com t (é uma nova função de t) não sendo constante no intervalo $[t, t + dt]$, contrariamente ao que se supôs. *Em rigor,* a intensidade I deverá ser definida pela fórmula:

$$I = f'(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}$$

c) A quantidade de calor q necessária para elevar de 0° a 1° a temperatura de um grama de certa substância é função de t:

$$q = \varphi(t)$$

A um acréscimo infinitésimo dt de t corresponde um acréscimo infinitésimo dq, de q, que pode ser considerado *proporcional* a dt. A constante de proporcionalidade, γ, chama-se *calor específico da substância à temperatura* t. Tem-se, pois:

$$\gamma = \frac{dq}{dt} = \varphi'(t)$$

Mas γ varia geralmente com a temperatura: é uma função de t (como no caso anterior).

NOTA IMPORTANTE. O acréscimo $\Delta y = \Delta f(x)$ de uma função num ponto x também é chamado *diferença finita da função,* principalmente quando se consideram acréscimos da variável independente *todos iguais entre si,* como sucede nas tabelas numéricas (p. ex. nas de logaritmos). Como acabámos de ver, a *diferença finita* Δy é, muitas vezes, substituída pelo *diferencial* dy. Mas também muitas vezes se faz a substituição inversa:

O *diferencial* dy é substituído pela *diferença finita* Δy (e portanto a *derivada* pela razão incremental), quando Δx é bastante pequeno.

Acontece isto correntemente em cálculo numérico, como veremos a propósito do cálculo integral. Faz-se então aquilo a que podemos chamar uma *discretização dos problemas*: as variáveis *contínuas* (de tempo, espaço, massa, etc.) são substituídas por variáveis *discretas,* com intervalos todos iguais. *O problema fundamental que se põe então aos matemáticos é o de avaliar o erro que daí resulta, para saber até que ponto a discretização conduz a resultados aceitáveis.*

No fundo, trata-se pois ainda aqui de *questões de convergência,* muitas das quais ainda estão por resolver em vários tipos de problemas, pela sua extrema dificuldade. Quando os técnicos não dispõem de critérios matemáticos rigorosos para controlar os resultados dos seus cálculos, são obrigados a verificá-los por meio de *modelos materiais,* que reproduzem ou *simulam,* em escala muito reduzida, a obra ou o fenómeno em estudo (modelos de barragens, modelos aerodinâmicos, etc.). Mas, além de morosos e caros, tais processos empíricos apenas fornecem uma fraca aproximação.

É de notar que os chamados 'computadores analógicos', baseados geralmente em analogias eléctricas, constituem um meio termo entre os métodos matemáticos e os *processos de simulação.*

44. Derivação das funções exponencial e logarítmica. Seja *a* um número positivo qualquer, diferente de 1. Procurem calcular a derivada da função $x \mapsto a^x$ num ponto x qualquer. Neste caso a razão incremental é:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$$

ou seja:

$$(1) \qquad \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Suponhamos que a^h-1 *tende para um limite finito quando* $h \to 0$ *e representemos esse limite por* $\lambda(a)$, *isto é:*

$$(2) \qquad \lambda(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Passemos, agora, ao limite em ambos os membros de (1), quando $h \to 0$, lembrando que a^x é *constante* (visto que estamos a considerar x fixo e só h variável). Virá, então:

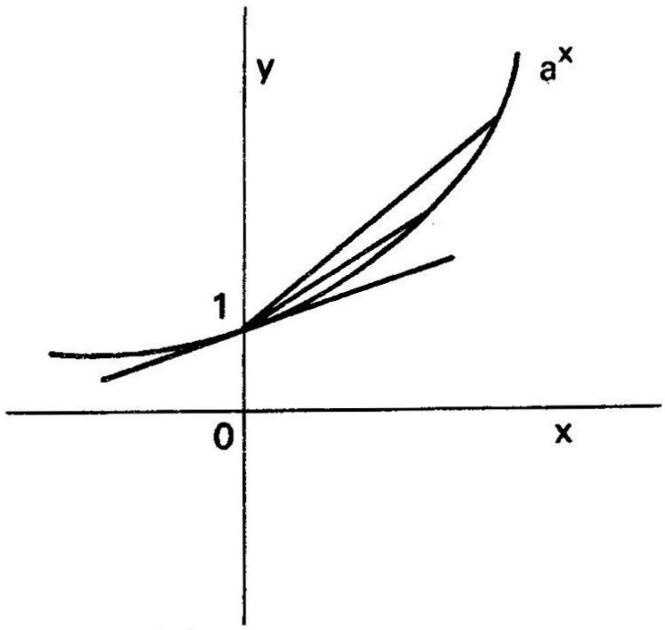
$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lambda(a)$$

Por conseguinte:

$$(3) \qquad D_x a^x = a^x \lambda(a) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$$

Mas este resultado foi obtido na hipótese de existir e ser finito o limite indicado em (2). Em tal hipótese, o limite $\lambda(a)$ será a derivada da função a^x no ponto zero (visto que $a^0 = 1$) e representa, portanto, o declive do gráfico da função no ponto de abcissa zero. Ora, demonstra-se efectivamente que esse limite existe e é finito(¹). Podemos, portanto, aceitar a fórmula (3) como válida.

(¹) Supondo $a > 1$, a demonstração pode fazer-se a partir dos seguintes factos: 1) a função é contínua; 2) por menor que seja δ positivo, os acréscimos a^δ-1, $a^{2\delta} - a^\delta$, $a^{3\delta} - a^{2\delta}$ são cada vez maiores (função de *acréscimos crescentes*). Daqui resulta que a razão $(a^h - 1)/h$, representativa do declive e da secante, diminui quando h decresce para zero e, como é sempre menor que 1, tende para um limite finito quando $h \to 0^+$. Isto implica, por sua vez, que existe, e é igual ao primeiro, o limite da razão incremental quando $h \to 0^-$. E o resultado estende-se facilmente ao caso em que $a < 1$.



Se, no lugar de x, se tiver uma função $u = \varphi(x)$, com derivada finita, virá, pelo teorema das funções compostas:

$$D_x a^u = (D_u a^u) D_x u = a^u \lambda(a) u' \tag{4}$$

Seja, agora, b outro número positivo $\neq 1$. Como

$$b = a^{\log_a b},$$

tem-se, elevando ambos os membros a *x*:

$$b^x = a^{x \log_a b},$$

donde, atendendo a (4), com $u = x \log_a b$:

$$D_x b^x = a^{x \log_a b} \lambda(a) \log_a b$$

ou seja:

$$D_x b^x = b^x \lambda(a) \log_a b$$

Mas, por outro lado, segundo (3), temos:

$$D_x\ b^x = b^x \lambda(b) \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde, por comparação com a fórmula anterior:

$$\lambda(b) = \lambda(a)\ \log_a b$$

Ora, podemos determinar b *de modo que seja* $\lambda(b) = 1$, *isto é,* $\lambda(a)\ \log_a b = 1$. Com efeito, esta igualdade equivale a

$$\log_a b = \frac{1}{\lambda(a)},$$

ou seja:

$$b = a^{1/\lambda(a)} \tag{5}$$

O valor de b assim obtido (sendo *a* um número positivo arbitrário) é a *base dos logaritmos neperianos,* que se designa por *e*. Demonstra-se que este número é irracional. Com 11 algarismos exactos, tem-se:

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Será, pois, $e = a^{1/\lambda(a)}$, segundo (5), donde:

$$e^{\lambda(a)} = a$$

e, portanto:

$$\lambda(a) = \log_e a.$$

Quer dizer: $\lambda(a)$ é precisamente o *logaritmo neperiano de* a, que, em matemática aplicada, se designa muitas vezes por ln a:

$$\ln a = \log_e a$$

Em questões de análise, é costume representar simplesmente pela notação log a o logaritmo neperiano de a, dada a frequência com que se apresentam aí os logaritmos nessa base. Para evitar equívocos, será preciso representar por $\log_{10} a$ o logaritmo decimal de *a*. *Todavia, em questões numéricas em que intervêm só logaritmos decimais, continua-se, por comodidade, a omitir a base* 10 *em índice.*

Costuma-se pôr:

$$M = \log_{10} e \quad , \quad \text{donde:} \frac{1}{M} = \log_e 10$$

Com 7 algarismos exactos, tem-se [1]:

$$M = 0{,}4342944 \quad , \quad 1/M = 2{,}302585$$

Lembrando que $\log_e a = \log_{10} a \cdot \log_e 10$, vem:

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\log a = \frac{1}{M} \log_{10} a \approx 2{,}3026 \log_{10} a}$$

[1] As tábuas de logaritmos costumam dar valores de *e*, M e 1/M com muitos algarismos exactos. Não é preciso, evidentemente, fixar os valores de *e*, M e 1/M, que são dados aqui apenas para eventual consulta.

Posto isto, a fórmula (3) pode escrever-se:

$$(7) \qquad \boxed{D_x a^x = a^x \log a}$$

Em particular, se $a = e$, vem:

$$(8) \qquad \boxed{D_x e^x = e^x} \quad , \text{ visto que } \log e = 1$$

Vemos, assim, que *a função* e^x *tem a particularidade muito notável de ser invariante por derivação*. É, portanto, *indefinidamente derivável,* sendo a sua derivada de qualquer ordem igual a e^x.

Mais geralmente, se, em vez de x, tivermos $u = \varphi(x)$, sendo φ uma função com derivada finita, as fórmulas (7) e (8) dão lugar às seguintes, aplicando o teorema das funções compostas:

$$D_x a^u = a^u \log a \cdot u' \quad , \quad D_x e^u = e^u u'$$

Note-se que a função e^x também se representa pela notação $\exp x$ (ler 'exponencial de x'). Tem-se, pois:

$$D_x \exp u = \exp u \cdot u'$$

EXEMPLOS:

I. Achar a derivada de $2^{\sqrt{x-1}}$ em ordem a x.

Tem-se;

$$D_x 2^{\sqrt{x-1}} = 2^{\sqrt{x-1}} \log 2 \cdot D_x \sqrt{x-1} = 2^{\sqrt{x-1}} \frac{\log 2}{2\sqrt{x-1}}$$

II. Achar a derivada de $\exp \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ em ordem a x.

Tem-se:

$$D_x \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} = \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} D_x \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

e como

$$D_x \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

vem:

$$D_x \exp \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \exp \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

III. Calcular, em ordem a x:

$$D\, e^{3x} \;,\; D\, e^{x^2+1} \;,\; D\, e^{(1-\sqrt{x})^2}$$

NOTA IMPORTANTE. A fórmula (6) permite converter logaritmos decimais em logaritmos neperianos, com certa aproximação. Por outro lado, os alunos devem ter presente que o cálculo dos valores de e^x se pode fazer por meio de logaritmos decimais, atendendo a que

$$\log_{10} e^x = x \log_{10} e = Mx$$

Aliás, é da máxima conveniência que, neste momento, ou anteriormente, os alunos aprendam a utilizar a régua de cálculo para expressões numéricas do tipo a^b. E também a utilizar o papel logarítmico ou semilogarítmico para linearização de funções exponenciais ou funções potências.

45. **Derivada da função logarítmica.** Seja ainda *a* um número positivo diferente de 1. Da fórmula (7) deduz-se a derivada da função $\log_a x$, aplicando a regra de derivação da função inversa (que convém previamente deduzir). Pondo $y = \log_a x$, vem:

$$x = a^y$$

Ora, segundo (7):

$$\frac{dx}{dy} = a^y \log a$$

Mas, segundo a regra da função inversa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log a}$$

Como $y = \log_a x$ e $x = a^y$, virá, finalmente:

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \log a}$$

Em particular, com a = e, vem:

$$\boxed{D_x \log\, x = \frac{1}{x}}$$

Se, em vez de x, se tem $u = \varphi(x)$, com derivada finita, vem, pelo teorema das funções compostas:

$$D_x\ \log_a u = \frac{u'}{u\ \log\ a}$$

Em particular

$$D_x\ \log\ u = \frac{u'}{u}$$

EXERCICIOS. Calcular, em ordem a x:

$$D\ \log_{10}(1+x^2)\quad ,\quad D\ \log\ (1+e^x)\quad ,\quad D\ \log\ (1+\sqrt{x^2+1})$$

$$\text{Resp.: } \frac{2x}{(1+x^2)\log 10}\ ,\ \frac{e^x}{1+e^x}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\ (1+\sqrt{x^2+1}\,)}$$

NOTA. As regras de derivação das funções exponencial e logarítmica permitem deduzir facilmente a regra de derivação das potências de expoente real α qualquer (racional ou irracional, positivo ou negativo). Tem-se, com efeito, $x^\alpha = e^{\alpha \log\, x}$, donde:

$$Dx^\alpha = De^{\alpha\log\, x} = e^{\alpha\log\, x}\, D(\alpha\log x)$$

$$= x^\alpha\ \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Portanto:

$$\boxed{Dx^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

46. **Derivadas das funções circulares.** As derivadas das funções circulares directas são deduzidas no *Compêndio de Trigonometria,* como se diz no *Guia*. Tem-se:

$$D \text{ sen } x = \cos x \quad , \quad D \cos x = - \text{sen } x$$

Se, em vez de x, se tem $u = \varphi(x)$, com derivada finita, vem:

$$D \text{ sen } u = \cos u \cdot u' \quad , \quad D \cos u = - \text{sen } u \cdot u'$$

$$D \text{ tg } u = \sec^2 u \cdot u'$$

Por exemplo:

$$D \text{ sen } 3x = 3 \cos 3x \quad , \quad D \text{ sen}^2 x = 2 \text{ sen } x \cos x$$

$$D\, e^{\cos x} = - e^{\cos x} \text{sen } x \quad , \quad D \text{ tg } (1 + \log x) = \frac{1}{x} \sec^2 (1 + \log x)$$

$$D \log (1 + \text{sen}^3 x) = \frac{3 \text{ sen}^2 x \cos x}{1 + \text{sen}^3 x} \text{ , etc.}$$

Para achar as derivadas das funções circulares inversas (ver *Guia,* 2.º volume, I, n.º 14), basta aplicar o teorema das funções inversas.

Assim:

a) Pondo $y = \text{arc sen } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), vem:

$$x = \text{sen } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

e, portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \tag{1}$$

Ora

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Logo, de (1) vem:

$$\boxed{D \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b) Analogamente se reconhece que

$$\boxed{D \text{ arc cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) Pondo $y = \text{arc tg } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) , vem:

$$x = \text{tg } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

e, portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Ora

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

Logo:

$$\boxed{D \text{ arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Mais geralmente, sendo $u = \varphi(x)$, com derivada finita:

$$D_x \text{arc sen } u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad D_x \text{arc cos } u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_x \text{arc tg } u = \frac{u'}{1+u^2}$$

Imagine e resolva alguns exercícios em que se apliquem estas regras.

47. **Máximos e mínimos, concavidades e inflexões.** Sobre estes assuntos seguir o *Compêndio de Álgebra*, Cap. VIII. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.

Ao fazer a distinção entre *máximos* (ou *mínimos*) *relativos* e *máximos* (ou *mínimos) absolutos,* convém tomar nota do seguinte teorema, que se pode aceitar intuitivamente, sem demonstração:

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Toda a função contínua num intervalo limitado e fechado* $[a, b]$ *toma nesse intervalo um valor máximo e um valor mínimo* (1).

É claro que tais valores têm de ser finitos *(porquê?).*

Note-se que esse máximo ou esse mínimo podem ser atingidos em mais de um ponto; basta lembrar o exemplo da função *seno* em intervalos tais como $[0, 4\pi]$, $[0, 6\pi]$, etc.

Quanto a exercícios sobre máximos, mínimos, etc., dispomos agora de maior variedade, visto ter sido alargada a classe de funções cujas derivadas se podem determinar facilmente. Nos casos em que intervierem funções exponenciais ou logarítmicas, convém ter presente qual é o sinal destas funções, para poder aplicar o PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO. Para isso, é aconselhável começar por resolver os exercícios 10 e 11 do Cap. XXII do *Compêndio de Álgebra (7.° ano).*

EXERCÍCIOS. Estudar o gráfico das seguintes funções, relativamente a sinais, sentido de variação e assímptotas:

a) $e^{-\frac{x^2}{2}}$; *b*) $x\, e^{-2x^2}$; *c*) $\dfrac{e^x}{x}$; *d*) $e^{-x} \cos x$

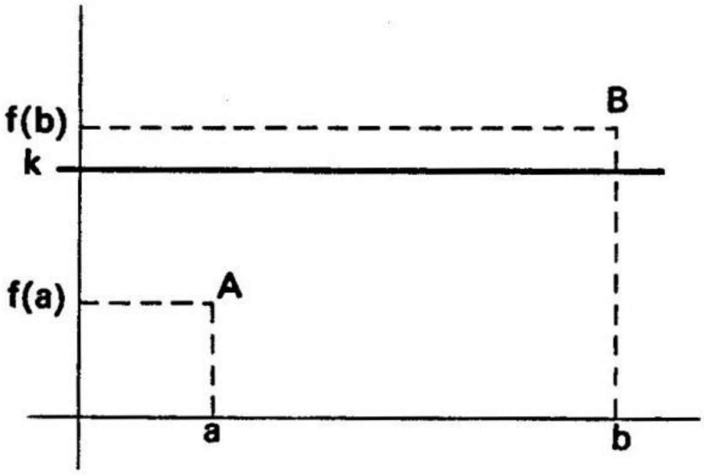
Estude o gráfico da primeira no que se refere a concavidades e pontos de inflexão *(respostas no final do número seguinte).*

---

(1) Subentende-se 'máximo absoluto' e 'mínimo absoluto'.

48. **Teorema de Cauchy** (1). Consideremos uma função f contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Suponhamos que $f(a) \neq f(b)$ — por exemplo, $f(a) < f(b)$ — e seja k um número qualquer compreendido entre f(a) e f(b):

$$f(a) < k < f(b)$$



Consideremos agora, num plano cartesiano, os pontos $A \smile (a,f(a))$, $B \smile (b,f(b))$ e a recta $y = k$. O ponto A está *abaixo* desta recta e o ponto B está *acima* da mesma *(porquê?)*. Pergunta-se, agora:

Será possível ligar os pontos A *e* B *por meio de uma linha contínua sem atravessar a recta* $x = k$?

Vê-se intuitivamente que a resposta é negativa.

---

(1) **A leitura deste número tem bastante interesse, mas não é indispensável para já.**

Ora, o gráfico da função f em $[a,b]$ é uma *linha contínua* que liga os pontos A e B. Logo, o gráfico corta necessariamente a recta $x = k$ *pelo menos* num ponto (pode cortar em mais de um: desenhe a lápis, sobre a figura, linhas destas em vários casos).

Posto isto, seja *c* a abcissa de um ponto em que o gráfico corta a dita recta. Qual é o valor da função f em c? Tem-se:

$$f(c) = \ldots$$

Vamos, agora, formular a conclusão sob a forma de um teorema. Hipótese? f *é uma função contínua em* $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$, k *é um número compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$. Tese? *Existe, pelo menos, um ponto* c *entre* a *e* b tal que $f(c) = k$. Este teorema, devido a CAUCHY, tem importância fundamental em análise, e é demonstrado rigorosamente em cursos universitários. Podemos enunciá-lo do seguinte modo:

TEOREMA DE CAUCHY. *Se* f *é uma função contínua num intervalo limitado e fechado* $[a,b]$, *e se* $f(a) \neq f(b)$, *então* f *toma nesse intervalo, todos os valores entre* $f(a)$ *e* $f(b)$.

Em forma intuitiva:

Uma função contínua não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

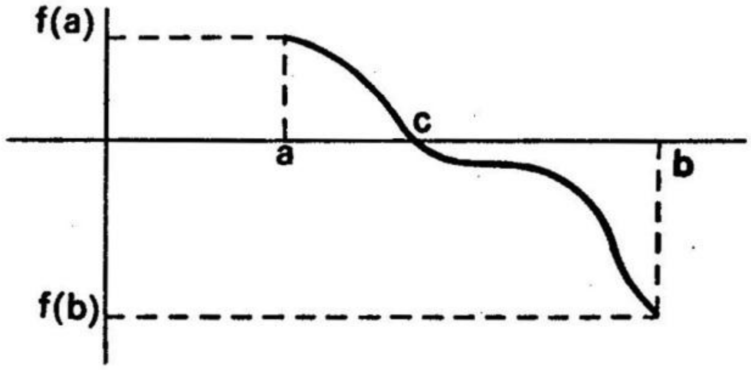
Exemplo concreto: a temperatura de um corpo é função contínua do tempo; logo, não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. (Nisto mesmo, aliás, consiste a ideia vulgar de '*variação contínua*'.)

Associado ao teorema de Weierstrass o teorema de Cauchy toma o seguinte aspecto:

I. *Uma função contínua num intervalo toma, nesse intervalo, todos os valores entre o máximo e o mínimo* (se estes coincidem a função é evidentemente constante no intervalo).

Outro aspecto do teorema de Cauchy é o seguinte:

II. *Se uma função* f *é contínua num intervalo* $[a,b]$ *e toma sinais contrários nos extremos do intervalo, então* f *tem pelo menos uma raiz nesse intervalo.*



No caso da figura tem-se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, e existe um ponto *c* entre *a* e *b* tal que $f(c) = 0$. Será, pois, *c* um zero de f situado entre *a* e *b*.

Na prática, o teorema de Cauchy aplica-se ao cálculo de raízes reais de equações.

Consideremos uma equação da forma

$$f(x) = 0$$

em que f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ (função real de variável real). Se f toma sinais contrários em *a* e *b*, já sabemos que existe, *pelo menos,* uma raiz de equação entre *a* e *b*. Para calcular uma tal raiz, pode-se começar por dividir $[a,b]$ em 10 partes iguais e ver o sinal que f toma nos pontos de divisão. Se f se anula num desses pontos (o que é pouco provável), está achada uma raiz; caso contrário, existem, *pelo menos,* dois pontos consecutivos a_1 e b_1, em que f toma ainda sinais contrários: *então existe, pelo menos, uma raiz entre* a_1 *e* b_1. Pode, agora, proceder-se para $[a_1, b_1]$, como se fez para $[a, b]$, e assim sucessivamente. Ora, de duas uma: ou um dos pontos de divisão é uma raiz, que fica assim calculada exactamente, ou se obtém uma sucessão de intervalos $[a_n, b_n]$ dentro dos quais está uma raiz r. Mas, neste caso, tem-se:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots$$

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{10}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{100}, \quad \ldots \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{10^n}, \quad \ldots$$

o que mostra que a_n e b_n são valores aproximados de r, respectivamente por defeito e por excesso, a menos de $(b-a) \times 10^{-n}$. Podemos, assim, calcular r com a aproximação que quisermos[1].

EXEMPLOS:

I. *Achar as raízes da equação* $2^x = 3x + 1$.

---

(1) Este processo de cálculo fornece uma *demonstração construtiva* do teorema de Cauchy (cf. n.º 35).

Uma das raízes é evidentemente 0. Para achar outra raiz, notemos que a equação é equivalente à seguinte:

$$2^x - 3x - 1 = 0$$

Representando o primeiro membro por f(x), vê-se que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e que, por exemplo,

$$f(3) = -2 \quad , \quad f(4) = 3$$

Portanto, segundo o teorema de Cauchy, existe, *pelo menos*, uma raiz entre 3 e 4. Calculando os valores de f nos pontos

3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9

vê-se que $f(3{,}5) < 0$, $f(3{,}6) > 0$. Existe, pois, uma raiz entre 3,5 e 3,6, cujo valor com dois algarismos exactos é, portanto, 3,5. Analogamente se calculava a raiz até às centésimas, até às milésimas, etc.

(Prova-se que a equação tem só duas raízes, que são as abcissas dos pontos da intersecção da recta $y = 3x + 1$ com a curva $y = 2^x$.)

II. *Achar os máximos e mínimos relativos da função* $y = x \operatorname{sen} x$ *no intervalo* $[0,2\pi]$.

A derivada da função é:

$$y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$$

Uma das raízes da derivada é, precisamente, 0 e aí é fácil ver que y' passa de negativa a positiva: portanto, 0 é um ponto de mínimo relativo. No 1.º quadrante é sempre $y' > 0$. Mas, no 2.º quadrante, tem-se $y' = 1$ para $x = \pi/2$ e $y' = -\pi$, para $x = \pi$. Portanto, segundo o teorema de Cauchy, existe, pelo menos, uma raiz da derivada entre $\pi/2$ e π, que pode ser calculada por aproximações sucessivas, como foi indicado. Pode, ainda, provar-se que essa raiz da derivada entre $\pi/2$ e π é *única* e que y' passa de *positiva* a *negativa* nesse ponto, que é, portanto, um ponto de *máximo relativo.*

Analogamente se prova que *existe um ponto de mínimo relativo no* 4.º *quadrante.* No 3.º quadrante é sempre $y' < 0$ e portanto y é decrescente.

No entanto, o referido processo de cálculo é demasiado laborioso, sobretudo quando não se dispõe de um computador electrónico. Um método muito mais expedito é o *método de Newton* (ou *da tangente)* que já indicámos no n.º 18, no caso particular aí considerado.

RESPOSTAS AOS EXERCICIOS DO NÚMERO ANTERIOR

a) $y' = e^{-x^2/2}.\ (-x)$, $y'' = (x^2-1)\ e^{-x^2/2}$. Como $e^{-x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $y' > 0$ para $x < 0$, $y' < 0$ para $x > 0$ e o sinal de y'' é o de $x^2 - 1$, portanto $y'' > 0$ para $x < -1 \vee x > 1$, e $y'' < 0$ para $-1 < x < 1$. Logo, $y > 0$ em $\mathbb{R}$, crescente em $]-\infty, 0[$, decrescente em $]0, +\infty[$, máximo em 0, pontos de inflexão para $x = 1$ e $x = -1$, concavidade para baixo em $]-1, 1[$, etc. Assímptota: $y = 0$. b) Negativa para $x < 0$, positiva para $x > 0$, nula para $x = 0$, decrescente em $]-\infty, -1/2[$ e $]1/2, +\infty[$, crescente em $[-1/2, 1/2]$, mínima em $-1/2$, máxima em $1/2$, assímptota $y = 0$. Curva simétrica em relação à origem. c) $y < 0$ para $x < 0$, $y > 0$ para $x > 0$, $y = \infty$ para $x = 0$ ($+\infty$ à direita, $-\infty$ à esquerda), decrescente em $]-\infty, 0[$ e $]0,1[$, crescente em $]1, +\infty[$, mínimo relativo em 1, assímptotas $x = 0$, $y = 0$. Concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$, para cima em $]0, +\infty[$; não tem pontos de inflexão. d) Zeros e sinais iguais aos de cos x; $y' = -e^{-x}$ (sen x + cos x), logo $y' = 0$ para $x = 3\pi/4 + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$); mínimos relativos de y para $x = 3\pi/4 + 2n\pi$, máximos relativos para $x = 7\pi/4 + 2n\pi$; deduz-se daí onde y cresce e onde decresce. Assímptota: $y = 0$ (só à direita).

49. **Método da tangente (ou de Newton)**[1]. Consideremos uma equação

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

Suponhamos que a função é contínua e admite derivada contínua num intervalo $[a,b]$; e que, além disso, f(a) e f(b) têm sinais contrários. Existe, portanto, pelo menos uma raiz de f nesse intervalo. Seja x_1 um *primeiro valor aproximado* de uma tal raiz (por exemplo $x_1 = a$ ou $x_2 = b$). Como já sabemos, se o acréscimo $x - x_1$ for *bastante pequeno*, o acréscimo $f(x) - f(x_1)$ é *aproximadamente igual* ao diferencial, $f'(x_1)(x - x_1)$, isto é:

$$f(x) - f(x_1) \approx (x - x_1)f'(x_1)$$

ou seja:

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

Podemos portanto, em primeira aproximação, substituir a equação (1) pela equação em x:

$$(2) \qquad f(x_1) + (x - x_1)\, f'(x_1) = 0$$

---

(1) **Leitura facultativa, recomendável antes da visita a um centro de cálculo automático.**

Como a equação (2) é *linear*, diremos que, na passagem de (1) para (2), a equação (1) foi *linearizada*. Resolvendo (2), vem sucessivamente:

$$(x - x_1)\ f'(x_1) = - f(x_1)$$

$$x - x_1 = - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad , \quad \text{supondo } f'(x_1) \neq 0,$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'x_1)}$$

Representemos por x_2 esta raiz da equação (2), isto é:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Podemos tomar, agora, x_2 como *segundo valor aproximado* da raiz de (2) em questão e proceder para x_2 como se fez para x_1 e assim sucessivamente. Fica, pois, definida uma sucessão x_n, a partir de x_1, pela fórmula de recorrência:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (3)$$

Suponhamos, agora, verificadas as seguintes condições:

I. f' é contínua e diferente de zero em $[a,b]$.

II. $x_n \in [a,b] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

III. A sucessão x_n é convergente.

Então, virá de (3):

$$\lim x_{n+1} = \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)} \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde, pondo $r = \lim x_n = \lim x_{n+1}$:

$$r = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

e, portanto

$$f(r) = 0$$

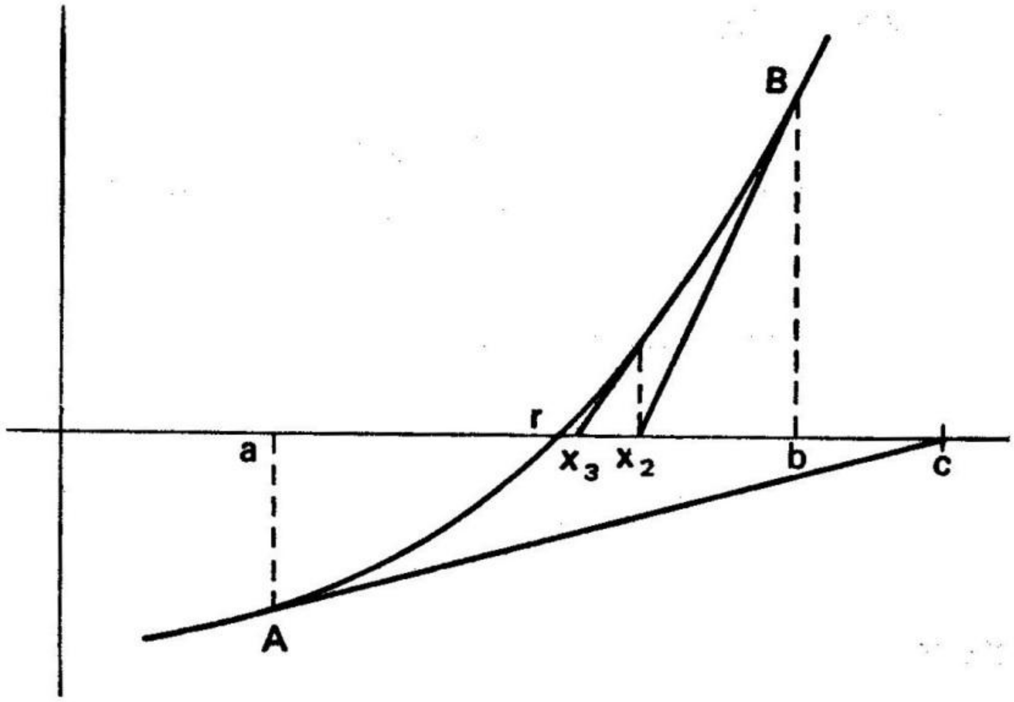
Quer dizer: *uma vez verificadas as referidas hipóteses,* a sucessão x_n tem, por limite, uma raiz de (1) situada entre *a* e *b*.

Mas, como se consegue saber se as condições II e III são verificadas?

Para isso, vamos recorrer à intuição geométrica. Já sabemos que a substituição do *acréscimo* $f(x) - f(x_1)$ pelo *diferencial* $f'(x_1)(x - x_1)$ equivale a substituir a *curva* representativa de f pela *tangente* à curva no ponto da abcissa x_1. Com efeito, esta recta tem por equação:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

O valor x_2 é a abcissa do ponto de intersecção da recta com o eixo dos x.



Na figura junta considera-se o gráfico de uma função f, que verifica as seguintes condições no intervalo $[a,b]$: 1) f tem derivada f' positiva ($\therefore$ f é crescente); 2) f tem 2.ª derivada, f'', também positiva ($\therefore$ a curva tem a concavidade voltada para cima); 3) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Nestas condições, f tem uma *e uma só* raiz r em $[a,b]$, *(porquê?)*. Experimentando o número *a* como primeiro valor aproximado de r, pelo método de Newton, vê-se que o segundo valor aproximado é um ponto c situado fora de $[a,b]$. Pondo $x_1 = b$, obtém-se um valor x_2 situado em $[a,b]$ e bastante mais próximo de r (tem-se $r < x_2 < x_1$). Continuando a aplicar o método de Newton deste lado, vê-se *intuitivamente*, pela figura, que a sucessão x_n obtida tem todos os valores em $[a,b]$ e é convergente. *São, pois, verificadas as condições* I, II e III *anteriores e, portanto,* $\lim x_n = r$.

Observe-se que, neste caso, se tem $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) > 0$ em $[a,b]$. *Portanto* f *e* f'' *têm o mesmo sinal em* b, *mas sinais contrários em* a.

Dum modo geral, demonstra-se a seguinte

REGRA: *Se* f *é uma função contínua em* $[a,b]$ *tal que:*

1) f *toma sinais contrários em* a *e* b;

2) f *tem segunda derivada com sinal constante em* $[a,b]$;

então f *tem uma e uma só raiz em* $[a,b]$, *que pode ser calculada pelo método de Newton; deve então tomar-se para primeiro valor aproximado,* x_1, *aquele extremo do intervalo* $[a,b]$ *em que* f *e* f'' *têm o mesmo sinal.*

EXEMPLOS:

I. Calcular $\sqrt[5]{23}$ com 7 algarismos exactos.

Note-se que $\sqrt[5]{23}$ é a raiz real da equação

$$x^5 - 23 = 0$$

(Como já sabemos, esta equação tem mais 4 raízes, mas todas imaginárias.) Representando por f(x) o 1.º membro da equação, vem:

$$f'(x) \equiv 5x^4 \quad , \quad f''(x) \equiv 20x^3$$

$$f(1) = -22 < 0 \quad , \quad f(2) = 9 > 0$$

Portanto, a raiz real procurada está entre 1 e 2. No intervalo $[1,2]$, tem-se $f''(x) > 0$. No extremo 2 do intervalo, f e f'' têm o mesmo sinal: é, pois, esse o extremo que convém tomar para primeiro valor aproximado. A *fórmula de recorrência* será, agora:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^5 - 23}{5x_n^4}$$

O cálculo já foi apresentado no n.º 18, pp. 60-61. Nesse §, como se viu (n.^os 18 e 23), o método iterativo foi justificado por via elementar.

II. Calcular, com 7 algarismos exactos, a raiz positiva da equação

$$2^x - 3x - 1 = 0$$

Já vimos no número anterior, exemplo I, que esta equação tem duas (e só duas) raízes reais: uma igual a zero e a outra situada entre 3 e 4. É desta que se trata agora. Representando por $f(x)$ o 1.º membro da equação, vem:

$$f'(x) \equiv 2^x \ln 2 - 3 \quad , \quad f''(x) \equiv 2^x (\ln 2)^2$$

Como $f''(x) > 0$ com $[3,4]$ e $f(x) > 0$, vê-se que o extremo favorável é 4. Utilizando a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2^{x_n} - 3x_n - 1}{2^{x_n} \ln 2 - 3} ,$$

com $x_1 = 4$, obteve-se por meio de um computador, no L. N. E. C., a sequência indicada à margem, tal como foi escrita pela teleimpressora ([1]). Aplicando a REGRA EMPÍRICA DE ESTABILIDADE, que será enunciada mais adiante, e admitindo que o número de algarismos exactos duplica sensivelmente em cada iteração, podemos aceitar que o seguinte valor aproximado da raiz tem 7 algarismos exactos:

$\cdot$ 40000000 $\ominus$ + 01
$\cdot$ 36291881 $\ominus$ + 01
$\cdot$ 35420414 $\ominus$ + 01
$\cdot$ 35376806 $\ominus$ + 01
$\cdot$ 35376701 $\ominus$ + 01

$$x = 3{,}537670$$

Note-se que uma dificuldade está no cálculo dos valores de 2^x para $x = x_2, x_3, \dots$. Esse cálculo foi feito pelo computador, em cada iteração, por meio de um desenvolvimento em série segundo as instruções de uma *sub-rotina,* incluída no programa. O tempo de cálculo na máquina não chegou a 1 minuto.

50. **Método da corda (ou regra da falsa posição)*.** Seja ainda f uma função contínua em $[a,b]$ e que tome sinais contrários em *a* e *b*. Para calcular por aproximações sucessivas uma raiz de f situada em $[a,b]$, pode-se utilizar o *método da corda,* também chamado «*regula falsi*» ou «*regra da falsa posição*». Consiste este método em substituir a curva representativa de f pela respectiva corda, cujos extremos são os pontos

$$(a,f(a)) \quad , \quad (b,f(b))$$

([1]) Cf. n.º 33, nota do exemplo I.

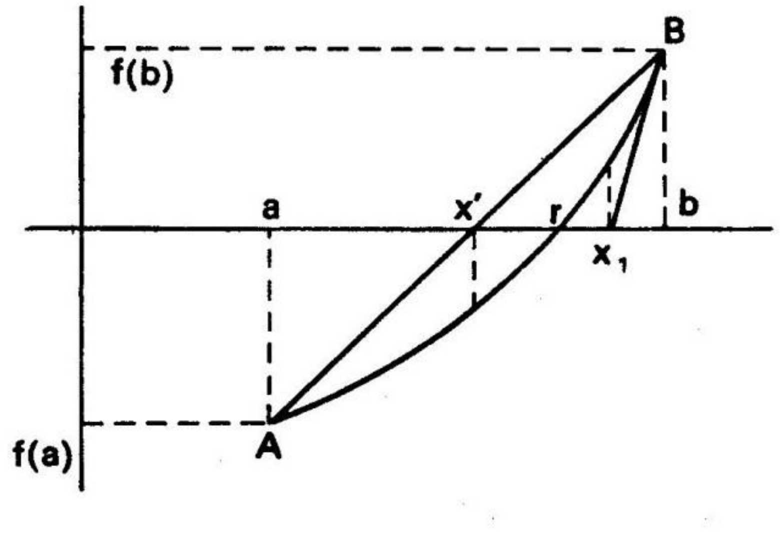
e achar a abcissa da intersecção da corda com o eixo dos x. Ora, uma equação da recta que passa por esses pontos é:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Fazendo nesta $y = 0$, obtém-se a equação em x que, resolvida, dá o referido valor aproximado. Representando-o por x′, temos:

$$x' = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Este método é menos expedito que o de Newton, mas tem a vantagem de não exigir condições prévias além desta: f continua com sinais contrários em *a* e *b*.



Além disso, quando o método da tangente é aplicável, o método da corda fornece um valor aproximado da raiz situado do outro lado desta, o que permite *majorar* o erro dos valores obtidos pelos dois métodos associados.

Todavia, na prática, sobretudo quando se usam computadores electrónicos, prefere-se adoptar *a regra empírica de estabilidade,* que já foi atrás usada, e que será enunciada mais adiante com precisão.

51. **Interpolação por diferenças finitas*.** O método da corda (ou regra da falsa posição) não se aplica apenas ao cálculo de raízes de equações. A *falsa posição* (ou, melhor, a *falsa suposição)* que dá o nome à regra, consiste em supor que, no intervalo considerado, a função é *linear* e que, portanto, os *acréscimos da função são proporcionais aos acréscimos da variável.* Isto é falso em geral, evidentemente, mas o erro que daí resulta pode tornar-se desprezável quando o intervalo é bastante pequeno, como sucede, por exemplo, no emprego das diferenças tabulares em tábuas de logaritmos.

Por outro lado, como já se disse atrás, os acréscimos de uma função também se chamam *diferenças finitas* (por oposição aos *diferenciais),* especialmente quando correspondem a sucessivos acréscimos *iguais* da variável independente. Mais precisamente, imaginemos uma tabela que forneça sucessivos valores y_1, y_2, y_3, ... da função, correspondentes a sucessivos valores x_1, x_2, x_3, ... da variável, conforme se indica a seguir:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots \end{array}$$

sendo $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = x_5 - x_4 = \ldots$ Então os acréscimos são chamados *diferenças finitas* da função na tábua e, mais precisamente, *pimeiras diferenças.* Chamam-se *segundas diferenças* da função as diferenças finitas das primeiras diferenças e representam-se do seguinte modo:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \quad , \quad \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 \quad , \quad \ldots$$

Tem-se pois, por exemplo:

$$(1) \qquad \Delta^2 y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$$

Por sua vez, as diferenças finitas das segundas diferenças são chamadas *terceiras diferenças* e representam-se deste modo:

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \quad , \quad \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \quad , \quad \ldots$$

e assim por diante.

Por exemplo, para a função $y = 1/x$, tem-se [1]:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3,0	0,33333			
		−1075		
3,1	0,32258		67	
		−1008		−6
3,2	0,31250		61	
		−947		−5
3,3	0,30303		56	
		−891		−6
3,4	0,29412		50	
		−841		
3,5	0,28571			

(1) Exemplo dado por D. R. HARTREE em «Numerical Analysis», Clarendon Press, Oxford.

em que, por comodidade, as diferenças são representadas tomando para unidade a centésima milésima.

O PROBLEMA DA INTERPOLAÇÃO — que tem importância fundamental no moderno cálculo numérico — consiste no seguinte:

Conhecidos os valores $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$, de uma função f em pontos sucessivos $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, determinar uma função φ *de dado tipo,* que tome nesses pontos os mesmos valores que f, e que permita calcular os valores de f nos *pontos intermédios,* com *certa aproximação* e com *relativa facilidade.*

O tipo de funções mais usadas para esse fim é o das *funções polinomiais,* sendo o grau do polinómio $\leqslant n$, se o número de pontos x_i for $n+1$. Se, além disso, os intervalos entre estes pontos forem iguais, isto é, se $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{n+1} - x_n$ está indicado o *método de interpolação por diferenças finitas,* que vamos descrever.

Comecemos por notar que

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad , \quad \text{visto ser } \Delta y_1 = y_2 - y_1$$

Mas também $y_3 = y_2 + \Delta y_2$ e

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1 \quad , \quad \text{visto ser } \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

Logo

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \Delta y_2 = (y_1 + \Delta y_1) + (\Delta y_1 + \Delta^2 y_1) \\ &= y_1 + 2\,\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 \end{aligned}$$

Analogamente se reconhece que

$$y_4 = y_1 + 3\,\Delta y_1 + 3\,\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1$$

A *analogia com a fórmula do binómio faz-nos prever* que seja

$$y_{n+1} = y_1 + n\,\Delta y_1 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{p}\Delta^p y_1 + \ldots \times \Delta^n y_1$$

ou ainda, convencionando que $\Delta^0 y_1 = y_1$:

$$(2) \qquad y_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\,\Delta^p y_1$$

Esta previsão pode ser confirmada pelo *método de indução matemática,* de que trataremos oportunamente.

É claro que a fórmula (2) também é válida, substituindo n por $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. E surge, agora, uma *ideia-chave:* a fórmula continua a ser válida, substituindo n por r, *excepto no símbolo de somatório*; isto é, tem-se:

$$(3) \qquad y_{r+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{r(r-1)\ldots(r-p+1)}{p!}\,\Delta^p y_1,$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. Basta notar que, se $r < n$, cada termo do somatório correspondente a um $p > r$ é nulo, de maneira que tudo se passa como se estivesse apenas r em vez de n no sinal Σ. Ponhamos:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{n+1} - x_n$$

Então será $x_1 + rh = x_{r+1}$, para $r = 0, 1, \ldots, n$. Seja, agora, x um ponto *qualquer* do intervalo $[x_1, x_{n+1}]$ e *r* não um inteiro mas sim o *número real* tal que $x_1 + rh = x$. Será, pois:

$$r = \frac{x - x_1}{h}$$

Substituindo r por esta expressão no 2.º membro de (3) e representando por y o valor da nova expressão obtida, vem:

$$y = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \frac{x - x_1}{h} \frac{x - x_1 - h}{h} \frac{x - x_1 - 2h}{h} \cdots \frac{x - x_1 - (p-1)h}{h} \Delta^p y_1$$

Mas $x_1 + h = x_2$, $x_1 + 2h = x_3$, ..., $x_1 + (p-1)h = x_p$. Logo:

$$(4) \qquad \boxed{y = \sum_{p=0}^{n} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_p) \frac{\Delta^p y_1}{p!\, h^p}}$$

Esta é a FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS, que se pode escrever, mais desenvolvidamente:

$$(4') \qquad y = y_1 + (x - x_1) \frac{\Delta y_1}{h} + (x - x_1)(x - x_2) \frac{\Delta_2^2 y_1}{2h^2} + \ldots +$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \frac{\Delta^n y_1}{n! h^n}$$

É claro que se for $x = x_{r+1}$, com $r = 0, 1, \ldots, n$, vem $x - x_1 = x_{r+1} - x_1 = rh$ e o valor de y dado por (4) é y_{r+1} segundo (3). Portanto, como se vê, *a fórmula* (4) *define, efectivamente, uma função polinomial de grau* $\leqslant n$, *que toma nos pontos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *respectivamente os valores* $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ (¹).

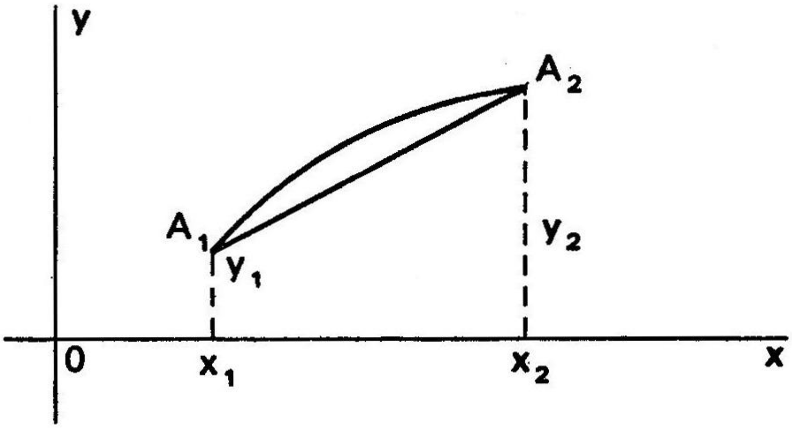
(¹) Aplicando o PRINCÍPIO DAS IDENTIDADES, vê-se que é esta a *única* função polinomial do grau $\leqslant$ n que toma os referidos valores nos pontos indicados.

Vamos examinar dois casos particulares:

1.º Se $n = 1$, a fórmula (4) reduz-se a:

$$(5) \qquad y = y_1 + (x - x_1)\frac{\Delta y_1}{h} = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

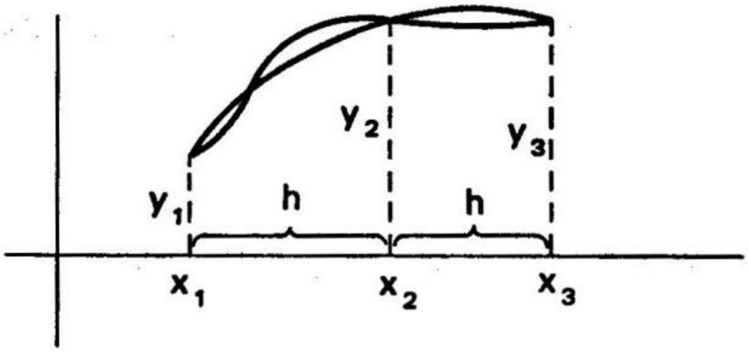
Neste caso *(interpolação por primeiras diferenças)* a função f é substituída em $[x_1, x_2]$ pela *função linear* que toma os mesmos valores nos extremos do intervalo — o que equivale a substituir o gráfico de f nesse intervalo, pela *corda* correspondente. É claro que isto não conduzirá a erro significante, *se o intervalo for bastante pequeno.*



Por exemplo, quando se usa uma tábua de logaritmos, a fórmula (5) permite calcular, com certa aproximação, o logaritmo y de um número x, compreendido entre dois números consecutivos, x_1 e x_2, inscritos na tábua. Neste caso, $h = 1$ e Δy_1 é a *diferença tabular,* expressa na última unidade decimal que a tábua dá para logaritmos (centésimas milésimas, para tábuas de 5 decimais). O problema inverso é o de *procurar o número* y *que tem por logaritmo* x, *estando* x *compreendido entre dois logaritmos,* x_1 *e* x_2, *consecutivos na tábua* (abstraindo da característica); neste caso, h é a diferença tabular e $\Delta y_1 = 1$.

2.º Se $n = 2$, a fórmula (4) reduz-se a:

$$(6) \qquad y = y_1 + (x - x_1)\,\frac{\Delta y_1}{h} + (x - x_1)\,(x - x_2)\,\frac{\Delta^2 y_1}{2h^2}$$



Neste caso *(interpolação por segundas diferenças)*, a função f é substituída geralmente no intervalo $[x_1, x_3]$ por uma *função quadrática*, o que equivale a substituir o gráfico de f pela *parábola de eixo vertical* que o intersecta nos pontos de abcissas x_1, x_2, x_3. Este processo fornece, em geral, *melhor aproximação* do que o anterior, nos intervalos $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$.

Ocasionalmente, pode acontecer que seja $\Delta^2 y_1 = 0$. Então a função dada por (6) é linear e recai-se no caso anterior.

(Bastará fazer uns dois exercícios com 2.as diferenças.)

NOTAS — I. Por vezes, em vez do cálculo aproximado de uma função f num intervalo $[a,b]$ em que f se encontra tabelada, procura-se uma expressão para o cálculo aproximado de f *fora* do intervalo $[a,b]$, mas *não muito longe* dos extremos. Nesse caso, trata-se de *extrapolação*, em vez de *interpolação*.

II. A primeira diferença finita de uma função f, correspondente a um determinado acréscimo h da variável independente, é mais precisamente indicada por meio do símbolo Δ_h. Este representa, pois, um *operador* definido pela fórmula

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

para todo o x tal que $x \in D_f$ e $x + h \in D_f$. O operador Δ_h transforma assim a função f na função φ tal que $\varphi(x) \equiv f(x+h) - f(x)$. Por outro lado, pondo

$$T_h f(x) = f(x + h) \quad , \quad \forall x : x, x + h \in D_f,$$

fica definido um novo operador T_h (*operador de translação*) e a fórmula anterior pode escrever-se

$$\Delta_h f = T_h f - f,$$

o que sugere a escrita $\Delta_h f = (T_h - 1)f$ ou ainda

$$\Delta_h = T_h - 1,$$

em que o símbolo 1 representa, agora, o *operador identidade*. Por outro lado, teremos

$$T_h = 1 + \Delta_h$$

e somos naturalmente *induzidos* a pensar que

$$T_h^n = (1 + \Delta_h)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta_h^p \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

A potência T_h^n de T_h é, evidentemente, o operador que consiste em somar *n* vezes h à variável independente de f, isto é, $T_h^n f(x) = f(x + nh)$. Portanto, a fórmula anterior significa que

$$f(x + nh) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta_h^p f(x),$$

o que, para $x = x_1$, nos faz recair na fórmula (2) atrás usada. Analogamente, somos induzidos a pensar que

$$\Delta_h^n = (T_h - 1)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} T_h^p \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

o que, aplicando a f, dá:

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} f(x + ph),$$

fórmula esta que também é verdadeira. É claro que, na prática, se pode omitir h em índice, desde que esteja subentendido qual é o acréscimo h de que se trata.

Note-se que a justificação dos anteriores desenvolvimentos de T_h^n e de Δ_h^n é feita num ramo de matemática moderna, chamado CÁLCULO SIMBÓLICO ou CÁLCULO OPERACIONAL.

III. Demonstra-se que, *se* f *é uma função polinomial do grau* $\leqslant$ n, *as suas diferenças finitas de ordem* n + 1 *são nulas qualquer que seja* h. A recíproca desta proposição também é verdadeira.

IV. As noções de *primeira diferença, segunda diferença, ..., diferença de ordem* n, correspondem às de *primeiro diferencial, segundo* *diferencial, ..., diferencial de ordem* n. Estas, para uma função $y = f(x)$, são definidas pelas fórmulas

$$dy = f'(x)dx \quad , \quad d^2y = f''(x)dx^2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

em que $f^{(n)}$ é a *derivada de ordem* n *de* f e dx^n é a potência *n* do acréscimo dx, que também podemos representar por h, isto é: $dx^n = h^n$. Daqui as *notações de Leibniz* para as derivadas de ordem superior à primeira

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f''(x) \quad , \quad \ldots \quad , \quad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

Demonstra-se que a diferença

$$\Delta^n y - d^n y$$

entre a *diferença de ordem* n e o *diferencial de ordem* y é um infinitésimo de ordem superior à de dx^n (num ponto x em que existe derivada de ordem *n* de f finito).

NOTA IMPORTANTE SOBRE TERMINOLOGIA. Muitos autores portugueses dizem 'a diferencial' em vez de 'o diferencial', por tradução directa do francês 'la différentielle'. Mas então deveria dizer-se, e não se diz, 'a integral' (do francês 'l'intégrale', em que o género feminino do substantivo 'intégrale' não se distingue, por causa do apóstrofo). Julgamos, assim, preferível adoptar para estas e outras noções análogas o género masculino, como fazem os italianos que dizem:

'il differenziale', 'l'integrale' (masc.)

e, genericamente: 'il funzionale' (*o funcional*).

Aliás, são frequentes as incoerências na terminologia matemática portuguesa, resultantes de uma tradução apressada do francês, como se verifica nas expressões:

> '*espaço a 3 dimensões*' (em vez de '*espaço com 3 dimensões*')
> '*equação às derivadas parciais*' (em vez de '*equação nas derivadas parciais*' ou '*equação em derivadas parciais*').

É também manifesta a incoerência entre as duas seguintes expressões em uso entre nós:

> '*máximo divisor comum*' e '*menor múltiplo comum*'

A 'máximo' opõe-se 'mínimo'. Ou bem se diz '*máximo divisor comum*' e '*mínimo múltiplo comum*, ou bem se diz '*maior divisor comum*' e '*menor múltiplo comum*'.

Aproveitamos ainda a oportunidade para discordar do significado que se atribui actualmente entre nós a 'bilião' (como 'milhão de milhões'). Não só nos parece pouco necessária uma designação especial para o número 10^{12}, como ainda se cria confusão na leitura de autores franceses, norte-americanos, italianos, alemães, etc., em que o correspondente a 'bilião' é 'mil milhões'. Acresce a circunstância de a população do Globo ser da ordem dos *biliões*, isto é, dos *mil milhões*.

É certo que os ingleses chamam 'billion' ao milhão de milhões; mas também é verdade que não adoptam *ainda* o sistema métrico e circulam *ainda* pela esquerda...

CAPÍTULO II

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL

1. **O problema da primitivação.** Como é sabido, o conceito matemático de 'derivada' traduz, em abstracto, o conceito físico de 'velocidade'. Quando se conhece a equação do movimento de um ponto,

$$s = f(t),$$

que dá o espaço, s, percorrido pelo móvel, em função do tempo t, contado a partir do instante inicial, a velocidade é obtida como derivada do espaço em ordem ao tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

Por exemplo, se a equação dos espaços é

$$s = 5t - 4{,}9\,t^2$$

(com *s* em metros e *t* em segundos), a equação das velocidades será:

$$v = 5 - 9{,}8\,t$$

Se a equação dos espaços é da forma

$$s = a \cos \varepsilon\, t \quad \text{(movimento vibratório simples)}$$

a equação das velocidades será:

$$v = -\,a\,\omega \operatorname{sen} \omega\, t \quad , \quad \text{etc.}$$

Consideremos, agora, o problema inverso:

Dada a equação das velocidades, $v = f(t)$, *achar a equação do movimento,* $s = F(t)$.

Em abstracto, o problema põe-se nestes termos:

Dada uma função f, *determinar uma função* F, *cuja derivada seja* f, *isto é, tal que*

$$DF = f$$

Uma tal função F chama-se *primitiva* de f (atendendo a que se chama a *derivada* de F).

Ora, o problema assim posto (chamado *'problema da primitivação*) nem sempre é possível e, quando possível, é sempre indeterminado.

Por exemplo, se for $f(x) \equiv \cos x$, uma primitiva de f será a função F_0 tal que $F_0(x) \equiv \operatorname{sen} x$. Mas há outras primitivas de f; por exemplo $F_3(x) \equiv \text{sen}\, x + 3$ e, de um modo geral, toda a função F tal que

$$F(x) \equiv \text{sen}\, x + C$$

em que C é uma constante arbitrária, visto que a *derivada de uma constante é sempre zero* e, portanto:

$$D_x(\text{sen}\, x + C) = \cos x$$

Existe, pois, uma infinidade de primitivas de cos x. Mas estarão todas incluídas na expressão sen x + C? Vamos ver que sim.

Com efeito, já se viu intuitivamente o seguinte (*Compêndio de Álgebra,* Cap. VIII, p. 242, III):

TEOREMA. *Se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, a função é constante nesse intervalo.*

Daqui resulta o seguinte

COROLÁRIO. *Se duas funções* F *e* G *têm derivadas finitas num dado intervalo, então* F−G *é constante nesse intervalo.*

Com efeito, se F e G admitem derivadas finitas iguais num dado intervalo, teremos nesse intervalo $DF-DG=0$ e, portanto, $D(F-G)=0$, donde se deduz, aplicando o teorema, que F−G é constante no referido intervalo.

Daqui se conclui a seguinte regra fundamental:

Se uma função f *tem uma primitiva* F_0 *num dado intervalo,* *então* f *tem aí uma infinidade de primitivas, que são todas dadas pela fórmula,*

$$F = F_0 + C$$

em que C *é uma constante arbitrária.*

Com efeito, seja F_0 uma primitiva de f. Então, se C é uma constante, tem-se:

$$D(F_0 + C) = DF_0 + DC = DF_0 = f$$

Reciprocamente, se F é também uma primitiva de f, a diferença $F - F_0$ é uma constante C, segundo o corolário anterior, e portanto $F = F_0 + C$.

Assim, por exemplo, as primitivas da função cos x são todas as funções dadas pela expressão sen x + C, onde C é uma constante arbitrária.

Dum modo geral, se f tem primitiva, designaremos por Pf uma primitiva de f escolhida arbitrariamente.

Ter-se-á, pois, por definição:

(1) $$DPf = f,$$

isto é:

A derivada de uma primitiva de f *é* f.

Mas podemos escrever apenas:

(2) $$PDf = f + C,$$

isto é:

Uma primitiva qualquer da derivada de f *é igual a* f *mais uma constante (num intervalo em que* f *tenha derivada finita).*

A fórmula (1) mostra que a *operação de primitivação* (operação plurívoca) *é inversa da operação de derivação à direita*. Mas não é *inversa à esquerda,* como indica a fórmula (2).

2. **Primitivações imediatas.** Para primitivar certas funções, basta inverter algumas das regras de derivação que foram dadas anteriormente. Por exemplo:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \qquad \text{donde} \qquad P \cos x = \operatorname{sen} x + C$$

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x \qquad » \qquad P \operatorname{sen} x = -\cos x + C$$

$$D\, x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^{\alpha} \qquad » \qquad P\, x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$$

$$D \log x = \frac{1}{x} \qquad » \qquad P \frac{1}{x} = \log x + C \; (x > 0)$$

$$D\, e^x = e^x \qquad » \qquad P\, e^x = e^x + C$$

$$D\, a^x = a^x \log a \qquad » \qquad P\, a^x = \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$D \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad » \qquad P \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$D \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad » \qquad P \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Note-se que o teorema das funções compostas permite reconhecer que (1)

$$D \log |x| = \frac{1}{x}$$

Portanto, uma primitiva de $1/x$ será $\log |x|$ para $x > 0$ ou $x < 0$.

Mais geralmente, se, em vez de x, tivermos $u = \varphi(x)$, sendo φ uma função com derivada finita, podemos associar o teorema das funções compostas às regras anteriores e organizar, assim, uma lista de primitivas, chamadas *primitivas imediatas:*

f	Pf
$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$
$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u^{\alpha} . u'$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, com $\alpha \neq -1$
$\frac{u'}{u}$	$\log \lvert u \rvert$
$e^u u'$	e^u
$a^u u'$	$\frac{a^u}{\log a}$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arc\,tg} u$

(1) Com efeito, se $x > 0$ tem-se $|x| = x$ e recai-se na regra anterior. Se $x < 0$, tem-se $|x| = -x$ e assim $D_x \log |x| = \frac{1}{|x|} \cdot D_x x = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Em muitos casos, consegue-se dar à função f uma destas formas, por transformação simples:

EXEMPLOS:

(fórmula 2) $$P \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{3} P (3 \operatorname{sen} 3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

(fórmula 4) $$P \operatorname{tg} x = P \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -P \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\log |\cos x| + C$$

(fórmula 5) $$P e^{2x-1} = \frac{1}{2} P (2 e^{2x-1}) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$$

(fórmula 3) $$P x^2\sqrt{1-x^3} = P [x^2 (1-x^3)^{1/2}] = -\frac{1}{3} P[-3x^2(1-x^3)^{1/2}] =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{(1-x^3)^{3/2}}{3/2} = -\frac{2}{9} \sqrt{(1-x^3)^3}$$

(fórmula 4) $$P \frac{x}{3+2x^2} = \frac{1}{4} P \frac{4x}{3+2x^2} = \frac{1}{4} P \frac{(3+2x^2)'}{3+2x^2}$$

$$= \frac{1}{4} \log (3+2x^2) + C$$

OBSERVAÇÕES:

I. Nestes exemplos aplicámos a fórmula

$$P(kf) = k(Pf) + C,$$

sendo k uma constante e f uma função que admite primitiva. Para ver que a fórmula é verdadeira, basta derivar o 2.º membro.

II. Na primitivação imediata de radicais é sempre conveniente escrever estes sob a forma de potência de expoente fraccionário, como se fez no 3.º exemplo anterior. Vejamos outro exemplo:

$$P \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} = P\left[x(1-3x^2)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{6} P\left[-6x(1-3x^2)^{-1/2}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\ \frac{(1-3x^2)^{1/2}}{1/2} = -\frac{1}{3}\ \sqrt{1-3x^2} + C$$

Mas, repare-se que

$$P \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} = P \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} P \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-(\sqrt{3}\cdot x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ \text{arc sen}\ \sqrt{3}x + C$$

$$P \frac{1}{2+3x} = P \frac{1}{2\left[1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ \text{arc tg}\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x + C$$

Por sua vez, as funções $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{x^3}{\sqrt{2+3x^2}}$, $\dfrac{x^3}{2+3x^2}$, etc.

não têm primitiva imediata.

EXERCÍCIOS — I. Primitivar:

$$\frac{x^2}{\sqrt{4-x^4}}, \quad \frac{e^x}{\sqrt{1+3e^x}}, \quad \frac{\text{sen } x}{1+2\cos x}, \quad \frac{x}{2+3x^4}$$

(Comece por perguntar a si mesmo em cada caso: 'Será uma potência? Será um arco-seno? Será um logaritmo? Será um arco-tangente?')

II. Primitivar em ordem a x:

$$\frac{1}{a^2+x^2} \ (a \neq 0), \quad \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ (a \neq 0), \quad \frac{k}{a+bx^2} \ (k \neq 0, \ ab > 0)$$

$$\frac{x}{a^2+x^2} \ (a \neq 0), \quad \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \ (a \neq 0), \quad \frac{kx}{a+bx^2} \ (k \neq 0, \ ab \neq 0)$$

3. **Regras elementares de primitivação.** Das regras de derivação da soma, do produto e da função composta, deduzem-se regras correspondentes de primitivação:

a) *Método de decomposição.* Sejam $f_1, f_2, ..., f_n$, funções que admitem primitiva num dado intervalo. Então a soma das funções também admite primitiva no mesmo intervalo e tem-se:

$$(1) \qquad P(f_1+f_2+...+f_n) = Pf_1 + Pf_2 + ... + Pf_n + C$$

Para o reconhecer, basta derivar o 2.º membro, aplicando a regra de derivação de uma soma. Por outro lado, tem-se, como já foi indicado atrás:

$$(2) \qquad P(kf) = k(Pf) + C$$

sendo k uma constante e f uma função com primitiva.

As fórmulas (1) e (2) habilitam, desde já, a primitivar qualquer função inteira:

$$P\ (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = C + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^n}{n}$$

Assim:

$$P\ (3 - 2x) = C + 3x - x^2$$

$$P\ (1 + 3x - x^4) = C + x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\ , \quad \text{etc.}$$

Suponhamos, por exemplo, que se trata do seguinte problema:

Determinar a equação do movimento rectilíneo de um ponto, sabendo que a aceleração é constante (1).

---

(1) É este o caso de um ponto material que cai verticalmente no vazio de altura não muito grande.

Como é sabido, a aceleração, que se representa por j, é a derivada da velocidade, v, em relação ao tempo, t; isto é:

$$\frac{dv}{dt} = j$$

Daqui se deduz, portanto, *primitivando em ordem a* t e lembrando que j é constante([1]):

$$v = jt + C$$

A constante arbitrária C é, evidentemente, a velocidade no instante t = 0 *(velocidade inicial)*; representando-a por v_o, vem:

$$v = v_o + jt \quad \text{(equação das velocidades)}$$

Como v = ds/dt, daqui se deduz novamente, *primitivando em ordem a* t:

$$s = v_o t + j\frac{t^2}{2} + C$$

A constante arbitrária C é, agora, o espaço no instante t = 0 *(espaço inicial)*. Representando este por s_o, vem finalmente a conhecida equação geral do *movimento uniformemente variado:*

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} jt^2$$

([1]) A variável independente agora é t em vez de x; por isso, dizemos 'primitivar em ordem a t'.

Assim, em conclusão:

O movimento de um ponto material sobre uma recta é uniformemente variado, se e só se a aceleração é constante (ou, o que é equivalente: *sse a força que solicita o ponto material é constante).*

Acontece, por vezes, que conseguimos primitivar uma função, decompondo-a numa soma de funções que já sabemos primitivar (daí o nome 'método de decomposição'). Por exemplo, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Portanto:

$$\mathrm{P} \operatorname{sen}^2 x = \mathrm{P} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{P} \cos 2x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \mathrm{P}(2 \cos 2x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x$$

EXERCÍCIO. Primitivar as funções de x:

$$\cos^2 x \quad , \quad (1 - \sqrt{x})^5$$

b) *Método de primitivação por partes*(1). Consideremos duas funções $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, que admitem derivada finita num dado

(1) Convirá tratar deste método e do seguinte só depois do n.º 12 (aplica-se porém no exercício I, 14, desse número).

intervalo. Então já sabemos que se tem, nesse intervalo, *derivando em ordem a* x:

$$(uv)' = uv' + u'v,$$

donde:

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Daqui se deduz, por primitivação em ordem a x, *notando que uma primitiva de* $(uv)'$ *é* uv:

$$P(uv') = uv - P(u'v)$$

Para aplicar este método à primitivação do produto de duas funções, designa-se por *u* uma das funções (em geral a que mais se simplifica por derivação) e por v' a outra função (em geral, a que mais facilmente se sabe primitivar).

EXEMPLO. Primitivar a função

$$x \operatorname{sen} x$$

Pondo

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \operatorname{sen} x \end{cases}, \quad \text{vem} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \ \text{(p. ex.)} \end{cases}$$

Portanto:

$$P(x \operatorname{sen} x) = uv - P(u'v) = -x\cos x - P(-\cos x)$$
$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - x\cos x$$

EXERCÍCIOS. Primitivar as funções:

$$x\,e^x \quad , \quad x \log|x| \quad , \quad \log|x| \quad , \quad \operatorname{tg} x$$

c) *Método de substituição.* Por vezes, consegue-se primitivar uma função $f(x)$, substituindo x por uma nova função $\varphi(t)$ com derivada finita, isto é, pondo

$$x = \varphi(t),$$

e atendendo à regra de derivação das funções compostas. Com efeito, se for F uma primitiva da função dada, f, tem-se, pela dita regra:

$$D_tF(x) = F'(x) \cdot D_tx = f(x)\varphi'(t)$$

ou seja:

$$D_tF\,(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Primitivando ambos os membros em ordem a t, vem:

$$\text{(3)} \qquad F(\varphi(t)) = P_t[f(\varphi(t))\varphi'(t)] + C$$

Portanto, uma vez que se saiba efectuar a primitivação imediata no segundo membro, *poderemos* achar uma primitiva F de f, substituindo em $F((\varphi(t))$ a variável t pela sua expressão em função de x. *Mas isto só é possível se φ for uma aplicação biunívoca sobre o domínio de* f. Nesta hipótese, sendo θ a inversa de φ, tem-se:

$$x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \theta(x) \qquad (\forall x \in D_f)$$

ou seja:

$$\varphi(\theta(x)) \equiv x$$

donde:

$$F[\varphi(\theta(x))] \equiv F(x) = P_x f(x)$$

A fórmula (3) pode pois escrever-se, neste caso:

$$\boxed{P_x f(x) = P_t[f(\varphi(t))\,\varphi'(t)] + C} \tag{4}$$

EXEMPLO: Primitivar $\sqrt{1-x^2}$.

Vamos experimentar a substituição $x = \text{sen}\, t$. O domínio da função $\sqrt{1-x^2}$ é o intervalo $[-1,1]$. A função $x = \text{sen}\, t$, *restringida ao intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$, é uma aplicação biunívoca deste intervalo sobre $[-1,1]$, e tem por inversa a função $t = \text{arc sen}\, x$. Então, aplicando a fórmula (4), vem:

$$P_x \sqrt{1-x^2} = P_t\,[\sqrt{1-\text{sen}^2 t}.\cos t] + C = P_t \cos^2 t + C$$

$$= P_t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) + C$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,\text{sen}\, 2t + C \tag{5}$$

Resta, agora, *desfazer* a *mudança de variável*, isto é, substituir t por arc sen x. Para isso, notemos que

$$\text{sen}\, 2t = 2\,\text{sen}\, t \cos t = 2\,\text{sen}\, t\,\sqrt{1-\text{sen}^2 t} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2x\sqrt{1-x^2}$$

Então de (5) vem finalmente:

$$P_x \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \text{arc sen } x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

4. **Alguns exemplos de aplicação às ciências da natureza.** Para se ter uma ideia da importância e do interesse do problema da primitivação, vamos estudar alguns exemplos concretos que conduzem a esse tipo de problema.

EXEMPLO I *(Transformação de energia eléctrica em calor).* A quantidade de calor, q, produzida por uma corrente eléctrica num fio condutor é função do tempo. Seja

$$q = f(t)$$

Segundo a LEI DE JOULE, a quantidade de calor, dq, produzida durante um intervalo de tempo infinitésimo $[t, t + dt]$ é proporcional à *resistência* R do condutor, ao *quadrado da intensidade* I da corrente no instante t e ao *tempo* dt; isto é, tem-se[1]:

$$dq = k\,R\,I^2\,dt$$

---

(1) É claro que estamos a empregar, por comodidade, a *linguagem abreviada dos infinitésimos* (cf. Cap. I, n.º 43). Nesta linguagem pouco rigorosa, de carácter intuitivo, a palavra 'infinitésimo' deve ser interpretada no sentido de *'muito pequeno'*. Note-se que estamos a considerar a intensidade I *constante* no intervalo (t,t + dt), o que, em geral, só é *aproximadamente* verdadeiro, quando dt é muito pequeno. Mas as fórmulas a que chegamos deste modo têm significado rigoroso.

ou seja:

$$\frac{dq}{dt} = k\,R\,I^2,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade cujo valor se conhece, no sistema usual de unidades.

Suponhamos, agora, que a intensidade I é dada em função do tempo. Seja, por exemplo:

$$I = I_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{(corrente sinusoidal)},$$

em que I_0 é a intensidade positiva máxima e ω a *frequência angular* ($\omega = 2\pi/T$, sendo T o período da corrente). Então

$$\text{(1)} \qquad \frac{dq}{dt} = k\,R\,I_0^2 \text{ sen}^2\, \omega t$$

Esta fórmula dá-nos, como se vê, a *derivada de* q *em ordem* a t. Portanto, para obter q como função de t, o que temos a fazer é *primitivar a função de* t *definida por esta fórmula.* Ora

$$P \text{ sen}^2\, \omega t = P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\,\omega t\right)$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega}\text{ sen } 2\,\omega t + C$$

Virá portanto de (1), atendendo a que $k\,R\,I_0^2$ é constante:

$$q = k\,R\,I_0^2\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega}\text{ sen } 2\,\omega t\right) + q_0$$

em que q_o é o valor de q para $t = 0$. Em particular, para $t = 2\pi/\omega = T$ (período), vem $q = \frac{1}{2} k R I_o^2 T + q_o$, donde:

$$q - q_o = \frac{1}{2} k R I_o^2 T$$

Esta fórmula dá-nos, pois, a quantidade de calor produzida durante um período (metade da que seria produzida por uma corrente constante de intensidade I_o).

EXEMPLO II *(Desintegração radioactiva)*. A massa *m* de um elemento radioactivo é função do tempo. Seja:

$$(2) \qquad m = f(t)$$

Mostra a experiência que, em cada intervalo de tempo infinitésimo $[t, t + dt]$, a substância sofre uma *perda de massa*, que é proporcional à *massa* m no instante t e ao *tempo* dt. Quer dizer: se representarmos por dm a variação da massa naquele intervalo, tem-se:

$$(3) \qquad dm = - k\, m\, dt,$$

em que k é uma constante positiva (chamada 'constante de desintegração'), cujo valor depende da substância radioactiva em questão. A *lei física* (3) pode também traduzir-se por

$$\frac{dm}{dt} = - km$$

Esta fórmula, como se vê, dá a derivada de *m* em ordem a *t* como *função de* m. Mas dela se deduz

$$\frac{dt}{dm} = -\frac{1}{km} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{m},$$

o que nos dá a derivada de *t* em ordem a *m* como função de *m*. Para obter *t* em função de *m*, teremos pois de *primitivar o 2.º membro em ordem a* m. Virá então, lembrando que 1/k é *constante:*

$$t = -\frac{1}{k} \log m + c \qquad \text{(c, constante arbitrária)}$$

Daqui se deduz:

$$\log m = -k\,(t-c) = kc - kt$$

donde:

$$m = e^{kc}\, e^{-kt}$$

ou ainda, pondo $C = e^{kc}$:

$$\text{(4)} \qquad m = C\, e^{-kt}$$

Será pois, esta, a expressão analítica da função (2). Note-se que, fazendo $t=0$ em (4), vem $m=C$. Portanto, C é a *massa inicial*, que podemos designar por m_0.

Como se vê, a função do 2.º membro de (4) tende rapidamente para zero quando $t \to +\infty$. Deste modo, chegará um instante em que *m* é praticamente igual a zero; mas esse instante não pode ser definido exactamente. Chama-se *vida média* do elemento radioactivo o tempo T necessário para a sua massa *m* se reduzir a metade da massa inicial, $m_o = C$. Será pois, por definição, aplicando (4):

$$\frac{1}{2} m_o = m_o e^{-kT},$$

donde $-\log 2 = -kT$ e, portanto:

$$T = \frac{\log 2}{k}$$

Esta fórmula, como se vê, relaciona a *vida média* T do elemento radioactivo, com a sua *constante de desintegração,* k.

Como exercício, pode resolver-se o seguinte problema ([1]):

Sabendo que a vida média do rádio é aproximadamente 1600 *anos, determine a percentagem de uma dada quantidade de rádio que se desintegra em* 100 *anos* (utilize a régua de cálculo).

EXEMPLO III. *(Crescimento populacional).* Seja *x* o número de indivíduos de uma dada população (seres humanos, animais ou bactérias) num instante t. É claro que x é função de t; seja $x = \varphi(t)$. Por outro lado, os valores de x são *números naturais:* trata-se pois de uma variável discreta ([2]). Mas, como esses números são geralmente muito grandes, torna-se cómodo, para certos fins, considerar x como *variável contínua*. É o que faremos neste caso.

([1]) Este e outros problemas a seguir foram extraídos da obra de T. M. APOSTOL, *Calculus* I (Blaisdell, New York).

([2]) Aliás, muitas das variáveis que consideramos contínuas são na realidade discretas, como por exemplo a *massa*, a *quantidade de electricidade*, etc. (porquê?).

Quando as condições do meio se mantêm normais, praticamente inalteradas, *é natural admitir* que o acréscimo dx da população num intervalo de tempo infinitésimo $[t, t + dt]$ é proporcional à população x no instante t e ao tempo dt. Obtemos, assim, a *lei de crescimento:*

$$(5) \qquad dx = k\,x\,dt \quad \text{ou seja} \quad \frac{dx}{dt} = kx,$$

em que dx/dt é a *taxa de crescimento* (aumento populacional por unidade de tempo no instante t) e k uma constante positiva que depende da espécie de população considerada.

Note-se que a fórmula (5) difere formalmente da fórmula (3) anterior apenas por ter coeficiente positivo k em vez do coeficiente negativo $-$ k. Isso, desde já, mostra que deve ser

$$x = x_0 e^{kt},$$

onde x_0 é a população existente no instante 0. A população cresce pois *exponencialmente* (ou, como também se diz, em *progressão geométrica)*. E assim acontece, efectivamente, em certas condições. Mas se, por alguma razão, a população não pode exceder um certo máximo M (p. exemplo, porque os recursos alimentares se podem esgotar), é *mais razoável* admitir que a taxa de crescimento é proporcional a x e a M$-$x. Assim, obtemos uma *segunda lei de crescimento:*

$$\frac{dx}{dt} = kx\,(M-x)$$

Neste caso, vem:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k} \quad \frac{1}{x(M-x)} = \frac{1}{Mk}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{M-x}\right).$$

donde, *primitivando em ordem a* x:

$$t = \frac{1}{Mk} \log \frac{x}{M-x} + c \qquad \text{(c, constante arbitrária)}$$

Daqui, por sua vez, deduz-se:

$$\frac{x}{M-x} = C\, e^{Mkt} \;, \quad \text{com} \quad C = e^{-Mkc},$$

donde:

$$(6) \qquad x = \frac{MC\, e^{Mkt}}{1 + C\, e^{Mkt}} = \frac{MC}{C + e^{-Mkt}}$$

Em particular, tem-se, para $t = 0$:

$$x_o = \frac{MC}{1+C} \qquad \text{donde} \qquad C = \frac{x_o}{M-x_o}$$

A fórmula (6) mostra que $x \to M$ quando $t \to +\infty$.

Esta lei *aproxima-se mais da realidade em certos casos*. No entanto, para obter *melhor aproximação*, torna-se necessário considerar k como *determinada função do tempo*, o que, evidentemente, torna o problema bastante mais complicado.

EXEMPLO IV *(Descida em pára-quedas)*. Já sabemos que, quando um corpo cai no vazio, de altura não muito grande, o seu movimento é uniformemente acelerado, com aceleração g (aceleração da gravidade).

Consideremos, agora, o caso de um corpo que cai verticalmente *na atmosfera* de grande altura, mas não tão grande que se torne sensível a variação de g (caso de um corpo deixado cair de um avião). Neste caso, à *força da gravidade* que faz cair o corpo, opõe-se uma outra força, devida à *resistência do ar.* A primeira é o peso mg (sendo *m* a massa do corpo). A segunda é *aproximadamente proporcional* à velocidade v, portanto igual a $-kv$, em que k é a constante de proporcionalidade (positiva)(1), considerando como positivo o sentido de *cima para baixo*. Portanto, a força que solicita o corpo em cada instante t é:

$$mg - kv,$$

sendo *v* a velocidade do corpo nesse instante. *O que se procura precisamente é determinar* v *como função de* t. Ora a *segunda lei de Newton* diz-nos que a força $mg - kv$ deve ser igual, em cada instante, ao produto de *m* pela aceleração do movimento, *que é, por definição, a derivada de* v *em ordem a* t. Ter-se-á, pois:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Daqui se deduz a *derivada da função inversa:*

$$\frac{dt}{dv} = \frac{m}{mg - kv}$$

---

(1) Estamos a seguir aqui a referida obra de APOSTOL.

donde, atendendo a que m, g, k são *constantes:*

$$t = P_v \frac{m}{mg - kv} = - \frac{m}{k} P_v \frac{-k}{mg - kv}$$

ou seja:

$$t = - \frac{m}{k} \log (m - kv) + c \quad , \quad \text{(c, constante arbitrária)}$$

Daqui podemos, finalmente, tirar v como função de t:

$$v = \frac{mg}{k} + C\ e^{-kt/m} \quad , \quad \text{com} \quad C = - e^{kc/m}$$

Para t = 0, obtém-se:

$$v_o = \frac{mg}{k} + C \quad \text{donde} \quad C = v_o - \frac{mg}{k}$$

e, portanto:

$$(1) \qquad v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) + v_o\ e^{-kt/m}$$

Esta, que é a *fórmula procurada,* dá uma boa aproximação da realidade no caso concreto considerado. Note-se que, quando $t \to +\infty$, $v \to mg/k$. *Assim, a velocidade tende a tornar-se constante, em virtude da resistência do ar.*

Pode ainda deduzir-se de (1) o seguinte:

Quando $k \approx 0$, *então* $v \approx v_o + gt$.

Quer dizer: *quando a resistência do ar é desprezável, o corpo segue aproximadamente a lei do movimento uniformemente acelerado, de acordo com a experiência.*

Como exercício, pode resolver-se o seguinte problema:

Um homem munido de pára-quedas salta de grande altura. O peso total do homem e do pára-quedas é de 92 kg. A velocidade v durante a queda (em metros por segundo) é uma função de tempo contado em segundos após o salto. Seja $v = \varphi(t)$. Durante os primeiros 10 segundos, antes de se abrir o pára-quedas, a resistência do ar é de 0,75 v (quilogramas-força). Depois, com o pára-quedas aberto, a resistência é de 12 v (quilogramas-força). Obter uma expressão analítica para $\varphi(t)$, tomando $g = 9{,}8\ m/s^2$ e supondo nula a velocidade inicial. *(Usar a régua de cálculo.)*

NOTA. No caso anterior, considerou-se a resistência do ar proporcional à velocidade. Para velocidades maiores (por exemplo em questões de balística), é necessário adoptar expressões mais complicadas para a resistência do ar em função da velocidade. E, quando se trata de projécteis que se afastam muito da terra, seguindo trajectórias não rectilíneas, já não é lícito considerar constante a aceleração da gravidade, o que vem complicar ainda mais o problema. Trata-se então de resolver *equações diferenciais* (ver-se-á mais tarde o que isso é), que exigem o emprego de técnicas de *cálculo numérico* bastante complexas, cuja execução se tornou possível e relativamente fácil com o aparecimento dos computadores electrónicos. Na verdade, estes foram inventados no fim da 2.ª Guerra

Mundial com a finalidade precisa de efectuar rapidamente cálculos balísticos complicados, como os que se põem na artilharia antiaérea.

Aliás, a necessidade de cálculo numérico automático põe-se já no problema da primitivação de funções em geral, como vamos ver em seguida ao introduzir o conceito de integral.

5. **Noção intuitiva de integral.** As regras de primitivação anteriormente indicadas aplicam-se apenas a uma *classe muito particular de funções.* Na verdade, a maior parte das funções que se apresentam na prática têm primitivas que não se podem obter pelas regras anteriores. E a razão é a seguinte: as primitivas, nesses casos, são *novas funções,* isto é, funções distintas de todas as que já conhecemos (funções algébricas racionais ou irracionais, funções exponenciais, funções logarítmicas, funções circulares directas ou inversas) e de todas as que se possam obter por composição destas em número finito.

Chamam-se *funções elementares* essas funções já conhecidas e todas as que se obtêm por composição delas em número finito. Por exemplo, as funções definidas pelas expressões

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}\ , \quad \frac{1}{\log x}\ , \quad \frac{e^x}{x}\ , \quad \sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}\ , \quad e^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\ , \quad \text{etc.}$$

são funções elementares. *Mas prova-se que têm por primitivas funções não elementares.* Portanto, as regras anteriores não permitem obter as primitivas destas funções.

Como determinar então as primitivas de tais funções?

Consideremos, novamente, o exemplo concreto de um movimento. Suponhamos que é conhecida a velocidade como função do tempo, $v = f(t)$, e que se procura o espaço como função do tempo, $s = F(t)$.

Para tornar as nossas considerações mais intuitivas, suponhamos que se trata do movimento de um automóvel, do qual se conhece em cada instante a velocidade, indicada pelo velocímetro. Como deduzir daí a equação do movimento, $s = F(t)$, isto é, o espaço percorrido pelo móvel, como função do tempo?

No caso do automóvel, o problema é resolvido automaticamente pelo *conta-quilómetros*. Mas suponhamos que não se dispõe de tal recurso.

Quando a velocidade é constante, a resposta é simples: *o espaço é igual ao produto da velocidade pelo tempo gasto em percorrer esse espaço*. Ter-se-á, então:

$$s = vt$$

Mas, em geral, *a velocidade varia de instante para instante.* Note-se, porém, o seguinte:

Num intervalo de tempo bastante pequeno a velocidade é aproximadamente constante (por exemplo, no intervalo de um segundo, a agulha do velocímetro de um automóvel não se desloca sensivelmente).

Portanto, o que haverá a fazer? *(Pense, antes de ver a resposta que vem a seguir.)*

Suponhamos que se pretende calcular o espaço percorrido num certo intervalo de tempo $[a,b]$. O que nos ocorre fazer, na *prática,* é começar por dividir esse intervalo em intervalos *bastante pequenos,* considerando sucessivos instantes muito próximos:

$$t_0 = a \ , \ t_1 \ , \ t_2 \ , \ \dots \ , \ t_{n-1} \ , \ t_n = b \ ,$$

$$t_0 = a \qquad t_1 \quad t_2 \qquad t_3 \qquad \dots \qquad t_{n-1} \quad b = t_n$$

Então, a velocidade em cada um desses intervalos parciais será *aproximadamente constante*. Como a velocidade em cada instante t é dada pela fórmula $v = f(t)$, as velocidades nos sucessivos intervalos parciais serão *aproximadamente* iguais a:

$$(1) \quad v_0 = f(t_0) \ , \ v_1 = f(t_1) \ , \ v_2 = f(t_2) \ , \ \dots \ , \ v_{n-1} = f(t_{n-1})$$

Designemos, respectivamente, por $\Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}$ os espaços percorridos pelo móvel nesses intervalos, e por $\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_{n-1}$ os tempos gastos em percorrê-los. Será, pois:

$$\Delta t_0 = t_1 - t_0, \ \Delta t_1 = t_2 - t_1, \dots, \ \Delta t_{n-1} = t_n - t_{n-1}$$

$$\Delta s_0 \approx v_0 \ \Delta t_0, \Delta s_1 \approx v_1 \Delta t_1, \dots, \Delta s_{n-1} \approx v_{n-1} \Delta t_{n-1} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Designemos, agora, por S o espaço percorrido no intervalo de tempo $[a,b]$. Tem-se, manifestamente:

$$S = \Delta s_0 + \Delta s_1 + \dots + \Delta s_{n-1}$$

e, portanto:

$$(2) \quad S \approx v_0 \Delta t_0 + v_1 \Delta t_1 \dots + v_{n-1} \Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \, \Delta t_k$$

ou seja, visto que $v_k = f(t_k)$, segundo (1):

$$(3) \qquad S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,\Delta t_k$$

Esta soma fornece, pois, um *valor aproximado* do espaço S procurado. E diz-nos a intuição que o *erro desse valor aproximado será tanto menor quanto menores forem os intrevalos considerados.* Por outros termos, o que a intuição nos diz é o seguinte:

A soma indicada em (2) [*ou* (3)] *tende para* S *quando o número dos intervalos parciais tende para infinito e as medidas dos intervalos tendem conjuntamente para zero.*

Exprime-se este facto, dizendo: '*O espaço* S *percorrido no intervalo* [a,b] *é o integral da velocidade* v *nesse intervalo*'; e escrevendo:

$$(4) \qquad S = \int_a^b v\, dt$$

ou

$$(5) \qquad S = \int_a^b f(t)dt,$$

o que se lê: '*integral de* f *entre* a *e* b'.

Como se justifica esta notação?

O sinal $\int$ de integral é, como se vê, um S alongado, inicial de 'soma'. Quando se adoptava o *método dos infinitésimos,* ainda hoje usado em física como método abreviado (cf. Cap. I, n.º 43), admitia-se que o *intervalo* $[a,b]$ *era a soma de uma infinidade de intervalos infinitésimos,* e que, *em cada intervalo infinitésimo* $[t,t+dt]$, *a velocidade* $v = f(t)$ *era constante.* Deste modo, o espaço percorrido nesse intervalo seria:

$$v\,dt = f(t)dt$$

e, portanto, o espaço *total* (ou *integral*) percorrido no intervalo $[a,b]$ seria a *soma* de todos esses intervalos infinitésimos, ou seja:

$$\int_a^b v\,dt = \int_a^b f(t)dt$$

Portanto o sinal $\int$, em substituição do sinal Σ (S grego), pretendia indicar a *soma de um número infinito de parcelas infinitamente pequenas.*

EXEMPLO[1]. Suponhamos que a equação das velocidades é:

(6) $\qquad v = jt \quad , \quad$ com j constante (aceleração),

e procuremos o espaço *s* percorrido no intervalo de tempo $[0,t]$. Portanto, neste caso, temos $a = 0$, $b = t$. Podemos dividir o intervalo $[0,t]$ em *n* intervalos iguais. Será, pois, agora:

$$\Delta t_0 = \Delta t_1 = \ldots = \Delta t_{n-1}$$

---

(1) Para leitura em casa, a fim de esclarecer o conceito de integral.

e, como a soma destes acréscimos deve ser igual a t, o valor de cada um deles será t/n. Designaremos esse valor por h, isto é:

$$t_i = h = \frac{t}{n} \quad , \quad \text{para } i = 0,1, \ldots, n-1 \tag{7}$$

Portanto:

$$t_o = 0 \quad , \quad t_1 = h, \ t_2 = 2h \quad , \quad \ldots \quad , \quad t_{n-1} = (n-1)h \quad , \quad t_n = nh = t$$

0 h 2h 3h ... (n−1)h nh=t

Atendendo a (6), virá agora:

$$v_o = 0 \quad , \quad v_1 = jh \quad , \quad v_2 = 2jh \quad , \quad \ldots \quad , \quad v_{n-1} = (n-1)jh$$

Multiplicando cada uma destas velocidades pelo tempo h, virá:

$$s_o = 0 \quad , \quad s_1 = jh^2 \quad , \quad s_2 = 2jh^2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad s_{n-1} = (n-1)jh^2$$

Portanto, a soma destes espaços dá-nos um valor aproximado do espaço *s* procurado. Representando essa soma por S_n, vem:

$$\begin{aligned} S_n &= jh^2 + 2jh^2 + \ldots + (n-1)jh^2 \\ &= jh^2\,[1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)] \end{aligned} \tag{8}$$

Designando a soma entre parêntesis por σ_n, temos:

$$\begin{array}{rcccccccccl} \sigma_n = & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-2) & + & (n-1) & & \\ \sigma_n = & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 2 & + & 1 & & \\ \hline 2\sigma_n = & n & + & n & + \ldots + & n & + & n & = n(n-1) \end{array}$$

donde:

$$\sigma_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Entrando em (8) com este resultado e com o valor de h dado por (7), vem:

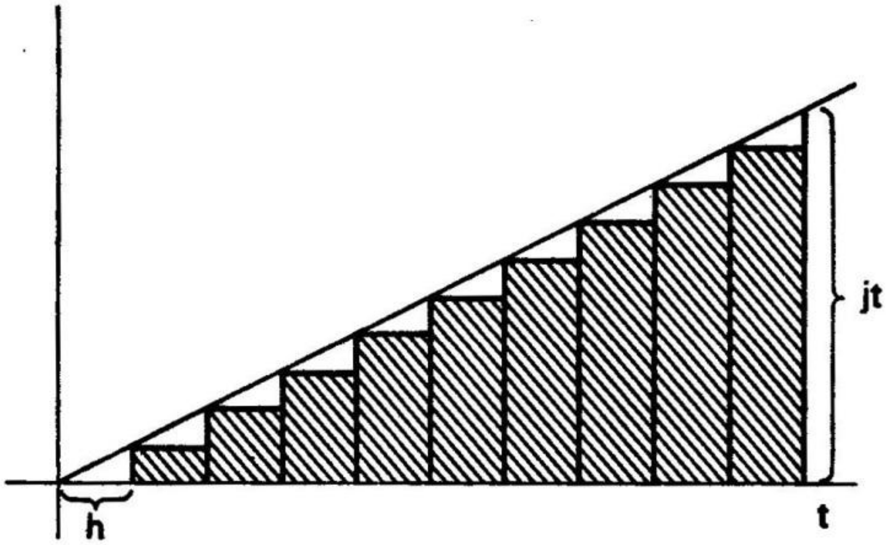
$$S_n = j\,\frac{t^2}{n^2}\;\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,jt^2\;\frac{n^2-n}{n^2}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, obtém-se o espaço s pedido:

$$s = \int_0^t v\ dt = \frac{1}{2}\,jt^2\,,$$

o que condiz com as equações dos espaços já conhecidas



Na figura junta, indica-se o gráfico das velocidades e uma decomposição do intervalo $[0,t]$ em 10 partes iguais. Como se vê, os produtos das velocidades pelos tempos *h* são representados geometricamente pelas áreas dos rectângulos a tracejado. Então S_n é a soma dessas áreas, e vê-se intuitivamente que S_n tende para a área de um triângulo, cuja base mede t e cuja altura mede jt. Ora essa área é, exactamente:

$$\frac{1}{2}\, t.\, jt = \frac{1}{2}\, jt^2$$

6. **Definição de integral.** Passemos, agora, do concreto para o abstracto, da intuição para a lógica. Seja f uma função real definida num intervalo $[a,b]$ e consideremos uma sequência de n + 1 pontos x_k tais que:

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$x_o = a \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad \ldots \qquad x_{n-1} \qquad b = x_n$

Ponhamos

$$\Delta x_o = x_1 - x_o \quad , \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

e designemos por X a sequência de intervalos $[x_o, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ assim determinados.

Chamaremos *soma da função* f *relativa à sequência* X *de intervalos o número* S_X obtido do seguinte modo:

$$S_X = f(x_o)\,\Delta x_o + f(x_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1}$$

$$= \sum_{k=o}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k \text{ (1)}$$

Posto isto, chamemos *módulos da sequência* X, e representemos por $|X|$, o maior dos acréscimos $\Delta x_o, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}$ (comprimentos dos intervalos) (2). É claro que, quando $|X| \to 0$, o número *n* de acréscimos considerados tende para infinito e cada um deles tende para zero. Pois bem:

Diz-se que S_X *converge para um número* S *quando* $|X| \to 0$, sse, para todo o número $\delta > 0$, existe um número $\varepsilon > 0$, tal que

$$|X| < \varepsilon \underset{X}{\Rightarrow} |S_X - S| < \delta$$

Diz-se que a função f é *integrável no intervalo* $[a,b]$, sse existe um número S nestas condições. Então esse limite S (que é único),

---

(1) Em vez do valor $f(x_k)$ da função f no extremo inferior de cada intervalo (x_k, x_{k+1}), poderíamos mais geralmente tomar o valor $f(u_k)$ de f num ponto *qualquer* $u_k \in (x_k, x_{k+1})$. Mas, desse modo, chegaríamos a uma definição equivalente à que vamos dar.

(2) Em física é habitual chamar *'intervalos'*, tanto aos conjuntos (x_k, x_{k+1}) como aos números $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ (que são, em rigor, os *comprimentos* daqueles intervalos). Trata-se manifestamente de um *abuso cómodo de linguagem*, que pode, no entanto, admitir-se, desde que não haja perigo de confusão.

chama-se *integral da função* f *no intervalo* [a,b] (ou *integral de* f *entre* a *e* b) e escreve-se:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Tem-se pois, por definição:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|X| \to 0} S_X$$

Integrar a função f *entre* a *e* b é achar o integral de f entre *a* e *b* (se a função é integrável neste intervalo). Na expressão $\int_a^b f(x)dx$, a função f chama-se *função integranda,* a variável x chama-se *variável de integração* e os números a,b, *extremos do integral;* por sua vez, o intervalo [a,b], chama-se *intervalo de integração.*

É claro que o integral depende da função integranda f e dos extremos a,b de integração, *mas não da variável* x *de integração*; esta é, pois, uma *variável aparente,* comparável aos índices mudos dos somatórios. Pode, pois, ser substituída por qualquer outra letra ou símbolo diferente dos que designam a função e os extremos de integração:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b f(u)du = \int_a^b f(\theta)d\theta = \cdots$$

O integral de f entre *a* e *b* pode também ser designado simplesmente pela notação:

$$\int_a^b f$$

Convém, desde já, notar que há funções que não são integráveis em dados intervalos. Demonstra-se, em matemática superior, o seguinte teorema:

Toda a função contínua num intervalo fechado é integrável nesse intervalo.

Mas importa, desde já, notar que há funções descontínuas que também são integráveis.

7. **O integral como limite de uma sucessão** (1). Quando uma função f é integrável num intervalo $[a,b]$, podemos calcular o integral de f em $[a,b]$, dividindo o intervalo em *n* intervalos iguais, calculando a soma de f relativa a essa sequência de intervalos e fazendo tender *n* para infinito (foi assim que procedemos no exemplo do n.º 4). É claro que, neste caso, o comprimento dos intervalos parciais será igual ao comprimento de $[a,b]$ dividido por n:

$$\Delta x_o = \Delta x_1 = \cdots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

Se representarmos este valor por h, temos então $x_o = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$, ..., $x_n = a+nh = b$.

Ponhamos, para simplificar:

$$y_o = f(x_o),\ y_1 = f(x_1), \ldots,\ y_{n-1} = f(x_{n-1})$$

---

(1) Sobre este assunto é muito importante ler o *Guia*.

Então a soma correspondente será:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{b-a}{n}$$

ou seja:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\,(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})\ (^1)$$

e tem-se:

$$\lim S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Em geral, não é possível calcular este limite exactamente, como aconteceu no exemplo do n.º 4. Na prática, a sucessão S_n fornece valores aproximados de integral, com o grau de aproximação que se queira. Quando a função f admite derivada e se conhece um majorante M dos valores de f'(x) no intervalo [a,b], tem-se a seguinte FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO, que damos a *título de curiosidade:*

$$|S-S_n| \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{n}$$

Como o 2.º membro tende para zero quando $n \to \infty$, podemos fazer o cálculo do integral com erro inferior a qualquer número positivo dado.

Porém, na prática, prescinde-se muitas vezes da majoração do erro, aplicando a seguinte

REGRA EMPIRICA DE ESTABILIDADE. Suponhamos que se calculam os sucessivos valores aproximados com um determinado

---

(1) Não esquecer que cada um dos valores $y_2, y_3, \ldots, y_n$ depende de *n*. Seriam então mais exactas, por exemplo, as notações $y_2^{(n)}, y_3^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}$.

número de algarismos exactos. Se, em dois ou três valores consecutivos se observa *estabilidade*, isto é, *constância* dos algarismos, há grande probabilidade de que esses valores aproximados dêem o valor do limite, *com o mesmo número de algarismos exactos*.

Os programas para computadores electrónicos incluem normalmente uma ordem para terminarem os cálculos quando se verifica a referida estabilidade.

Mas note-se bem: não há então a *certeza absoluta* de que todos os algarismos sejam exactos; há apenas uma *grande probabilidade de que o sejam* ([1]).

Há ainda outros métodos para o cálculo numérico de integrais, mas, dum modo geral, são todos muito laboriosos, exigindo o emprego de um bom computador. O primeiro computador electrónico utilizado chamava-se ENIAC («Electronic Numerical Integrator and Calculator»).

EXEMPLO. Calcular, se possível, com 5 algarismos exactos:

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx$$

Este cálculo foi efectuado, segundo o referido processo, por meio do computador digital do L.N.E.C. O programa ordenava que se dividisse o primeiro intervalo em 40 partes iguais e se fosse duplicando sucessivamente esse número, até se obter a estabilidade nos 5 algarismos iniciais. Em cada aproximação, o cálculo dos valores da função e^x/x nos extremos dos intervalos parciais

3.8280264 $\odot + 10$
3.8287682 $\odot + 10$
3.8289550 $\odot + 10$
3.8290012 $\odot + 10$
3.8290074 $\odot + 10$
3.8290115 $\odot + 10$

([1]) Se os algarismos são todos 9 a partir de certa casa decimal, substituem-se por 0 e aumenta-se uma unidade ao primeiro que não é 9 (ou ao algarismo inicial se todos forem 9).

foi efectuado por desenvolvimentos em série, segundo uma *sub-rotina* incluída no programa. Os valores que se indicam (tais como foram escritos pela teleimpressora) são os das somas S_n, para $n = 40$, 80, 160, ..., 1280.

Observa-se estabilidade dos 5 primeiros algarismos a partir do 4.° valor aproximado. Mas é preciso não esquecer que, no cálculo das somas S_n, se cometem *erros de arredondamento*, cada vez maiores, de acordo com a teoria exposta no capítulo I, § 1. Todavia, atendendo a essa teoria e ao número de parcelas, é de admitir que *se perdem por esse motivo, quando muito, três algarismos exactos.* Podemos, pois, aceitar como válido o seguinte resultado, *com 5 algarismos exactos:*

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx = 38{,}290$$

Aliás, este resultado será conferido mais adiante por outra via.

O tempo total de cálculo na máquina foi de cerca de 1/4 de hora, o que não admira: *basta lembrar que se teve de calcular, por meio de séries, o valor de* e^x/x *com* 8 *algarismos, em* 2520 *pontos diferentes!*

Neste cálculo a máquina deu o máximo que podia. Este simples exemplo faz sentir, desde já, a necessidade de *métodos de integração numérica* mais expeditos — processos que, pelo menos, requeiram menor número de intervalos parciais. De tais métodos faremos breve referência mais adiante.

Mas também se pode, desde já, prever o aparecimento de problemas que, mesmo com os melhores métodos conhecidos, exijam computadores cada vez mais potentes. O certo é que se começa já a desenhar entre nós a necessidade de um GRANDE CENTRO NACIONAL DE CÁLCULO, munido de um computador de alta potência. Este não eliminaria a necessidade de computadores de pequena ou média potência, que poderiam ficar ligados telefonicamente ao primeiro, a fim de transferirem para este a resolução de problemas que não tivessem capacidade para resolver.

8. **Interpretação geométrica do conceito de integral.** Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$. Já sabemos que, neste caso, f é integrável em $[a,b]$. Suponhamos que se tem

$$f(x) \geqslant 0 \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

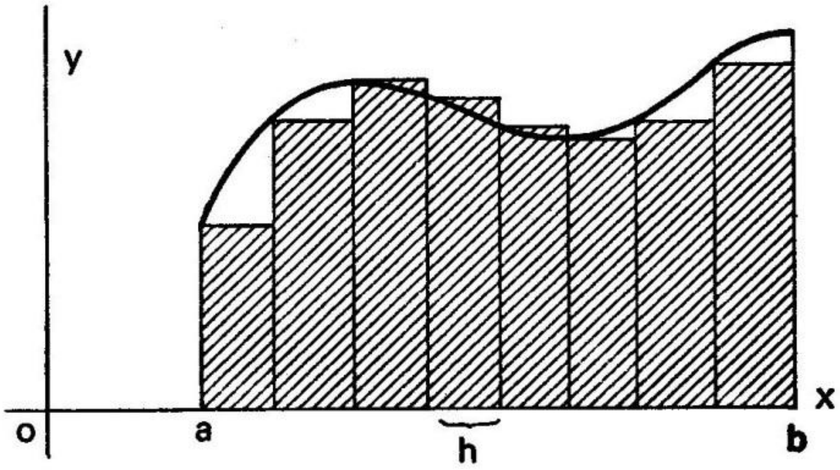
Como vimos, o integral de f em $[a,b]$ pode ser dado como limite da sucessão

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p)h$$

em que

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \quad x_p = a + ph \quad , \quad \text{com } p = 0,\ 1, \ldots, n-1$$

É claro que $f(x_p)h$ dá a área de um rectângulo de base h e altura $f(x_p)$.



Na figura considerou-se $n = 8$ e indicam-se a tracejado os rectângulos cujas áreas são dadas pelos produtos $f(x_p)h$. Torna-se então intuitivo que, quando $n \to \infty$, S_n tende para a área da figura limitada pelo gráfico da função, pelo eixo dos x e pelas rectas $x = a$ e $x = b$. Essa figura é chamada o *trapezóide definido pela função* f *no intervalo* $[a,b]$.

Assim, chegamos intuitivamente à seguinte conclusão:

Quando f *é uma função contínua não negativa no intervalo* $[a,b]$, *o integral de* f *entre* a *e* b *dá a área do trapezóide definido por* f *em* $[a,b]$.

9. **Valor médio duma função; teorema da média** (¹). Consideremos *n* números reais

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Seja μ o maior e o λ o menor deles. Então:

$$\lambda \leqslant a_1 \leqslant \mu \quad , \quad \lambda \leqslant a_2 \leqslant \mu \quad , \quad \ldots \quad , \quad \lambda \leqslant a_n \leqslant \mu$$

donde, somando ordenadamente:

$$n\lambda \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant n\mu$$

$$\lambda \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \mu$$

(¹) **Este assunto pode ser dispensado numa primeira leitura.**

Em conclusão:

A média aritmética de vários números é sempre inferior ou igual ao maior desses números e superior ou igual ao menor deles.

Vamos ver que esta propriedade se estende aos integrais.

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Designemos por M o valor máximo de f e por L o valor mínimo de f, no intervalo $[a,b]$ — valores esses que existem, segundo o TEOREMA DE WEIERSTRASS (p. 176). O integral de f em $[a,b]$ é o limite da sucessão

$$(1) \qquad S_n = \frac{b-a}{n}\,(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

em que y_p é o valor de função f no ponto $x_p = a + ph$, sendo

$$h = \frac{b-a}{n} \quad , \quad p = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$$

Tem-se portanto, qualquer que seja n:

$$L \leqslant y_p \leqslant M \quad , \quad \text{para } p = 0,\ 1, \dots, n$$

donde:

$$(2) \qquad L \leqslant \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}}{n} \leqslant M$$

Ora, de (1) vem:

$$(3) \qquad \frac{S_n}{b-a} = \frac{y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}}{n}$$

Como $S_n \to \int_a^b f(x)dx$, conclui-se de (3), passando ao limite e pondo y em vez de f(x), para simplificar:

$$(4) \qquad \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n},$$

donde, atendendo a (2):

$$(5) \qquad L \leqslant \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a} \leqslant M$$

O número

$$(6) \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a},$$

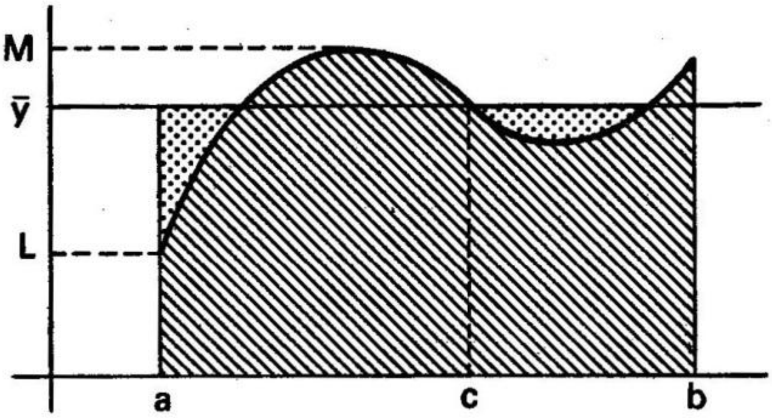
que se obtém dividindo o integral por b−a, é chamado *valor médio da função* $y = f(x)$ *em* $[a,b]$.

A fórmula (6) diz-nos, precisamente, o seguinte:

TEOREMA DA MÉDIA. *O valor médio de uma função contínua num intervalo é inferior ou igual ao máximo da função, e superior ou igual ao mínimo da função no dito intervalo.*

Segundo o TEOREMA DE CAUCHY (p. 177) existe pelo menos um ponto de $[a,b]$ em que a função f toma o valor médio $\bar{y}$, o que aliás é intuitivo ([1]).

([1]) As considerações que vão seguir-se tornam dispensável a leitura do n.º 48 do Cap. I.



Na figura junta considera-se o gráfico de uma função f no intervalo $[a,b]$. Estão indicados o máximo M, o mínimo L e o valor médio $\bar{y}$. Como o gráfico da função é uma linha contínua, a recta $y = \bar{y}$ há-de encontrar essa linha, pelo menos, num ponto c (no caso da figura encontra em três pontos).

Ora, de (6) vem:

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\bar{y}$$

Então, do teorema da média deduz-se:

COROLÁRIO. *Se* f *é contínua em* $[a,b]$, *existe pelo menos um ponto* c *de* $[a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

No caso em que f é não negativa, isto traduz-se geometricamente do seguinte modo:

Existe um ponto c *de* $[a,b]$ *tal que a área do trapezóide definido por* f *em* $[a,b]$ *é igual à área do rectângulo de base* b−a *e altura* f(c).

A noção de valor médio duma função tem muita importância, não só em cálculo das probabilidades e em estatística, como ainda em física e outras ciências experimentais.

Por exemplo, conhecida a velocidade de um móvel em função do tempo, $v = \varphi(t)$, o *valor médio da velocidade* num intervalo $[a,b]$ será (1):

$$\bar{v} = \frac{\int_a^b v\,dt}{b-a}$$

Analogamente, dada a intensidade de uma corrente em função do tempo, $I = \psi(t)$, o valor médio da intensidade (ou intensidade média) num intervalo $[a,b]$ será:

$$\bar{I} = \frac{\int_a^b I\,dt}{b-a} \quad , \quad \text{etc.}$$

10. **Teorema da decomposição do intervalo.** Sejam a,b,c três números reais tais que

(1) $$a < b < c$$

e seja f uma função contínua em $[a,c]$. Consideremos, agora, uma sequência de números reais $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tais que

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b < x_{n+1} < \cdots < x_{m-1} < x_m = c$$

(1) Prova-se, depois, que o *valor médio da velocidade* em (a,b) coincide com a *velocidade média* em (a,b), tal como esta é habitualmente definida.

e ponhamos:

$$\Delta x_p = x_{p+1} - x_p \quad , \quad \text{para } p = 0, 1, \ldots, m$$

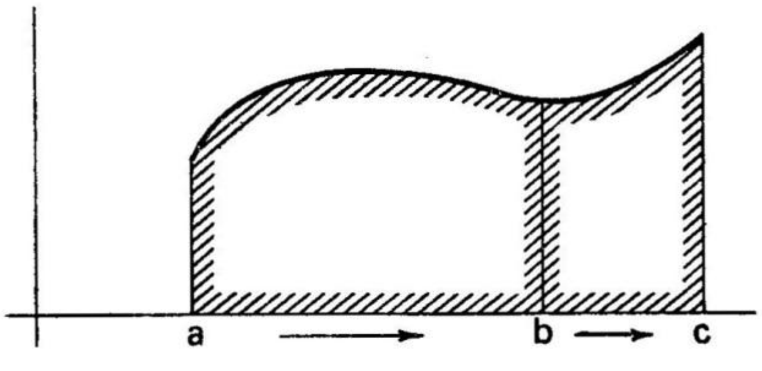
Então virá, pela *propriedade associativa da adição:*

$$\sum_{p=0}^{m-1} f(x_p)\,\Delta x_p = \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p)\,\Delta x_p + \sum_{p=n}^{m-1} f(x_p)\,\Delta x_p$$

Ora, quando m tende para infinito, de modo que *o maior dos acréscimos* Δx_p tenda para zero, o primeiro dos somatórios tende para $\int_a^c f$, o segundo para $\int_a^b f$ e o terceiro para $\int_b^c f$. Ter-se-á, portanto, em notação abreviada:

$$\boxed{\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f}$$

É este *o teorema da decomposição do intervalo,* que se traduz geometricamente nos seguintes termos, quando a função integranda não é negativa: *A área do trapezóide definido por* f *em* $[a,c]$ *é igual à soma das áreas dos trapezóides definidos por* f *em* $[a,b]$ *e* $[b,c]$.



Note-se que o integral $\int_a^b f$ foi definido, na hipótese em que $a < b$. O teorema anterior sugere uma generalização do conceito de integral. Põe-se, *por definição,*

$$(2) \qquad \int_a^b f = \begin{cases} -\int_b^a f & , \text{ se } \quad a > b \\ 0 & , \text{ se } \quad a = b \end{cases}$$

quaisquer que sejam os números reais *a, b.*

Depois disto, o teorema da decomposição do intervalo passa a ser válido, quaisquer que sejam as relações de grandeza entre *a, b, c.* Por exemplo, tem-se ainda:

$$(3) \qquad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad , \text{ quando } \quad a < b < c,$$

visto que então, segundo o resultado anterior:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

ou seja, atendendo a (2):

$$\int_a^b f = \int_a^c f, - \int_b^c f \quad , \text{ donde } (3)$$

(Esclareça com uma figura).

11. **Teorema fundamental do cálculo integral.** Recordemos que o conceito de integral nos apareceu intuitivamente no n.º 5, quando procurávamos um método geral para determinar

primitivas de funções dadas e, concretamente, no seguinte problema:

Dada a equação das velocidades, v = f(t), *pede-se a equação dos espaços; isto é, procura-se uma função* s = F(t), *tal que*

$$\frac{ds}{dt} = f(t)$$

Fomos, então, levados a substituir os *diferenciais* ds e dt pelos *acréscimos* Δs e Δt (também chamados *diferenças finitas)*, atendendo a que:

$$\Delta s \approx f(t)\,\Delta t \quad , \quad \text{se } \Delta t \text{ é bastante pequeno}[1].$$

Assim, o espaço percorrido desde um instante inicial t_o até um instante t qualquer deverá ser *aproximadamente igual a*

$$f(t_o)\Delta t_o + f(t_1)\;\Delta t_1 + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p)\;\Delta x_p$$

onde $t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ e $\Delta t_o = t_1 - t_o$, $\Delta t_1 = t_2 - t_1, \ldots$ $\Delta t_{n-1} = t_n - t_{n-1}$. Isto levou-nos a admitir que o espaço percorrido seria *exactamente igual* ao limite para que tendesse a referida soma quando o número *n* dos acréscimos considerados tende para infinito e o valor máximo dos acréscimos tende para zero. Esse limite (se existe) chama-se *integral de* f *entre* t_o *e* t e representa-se por $\int_{t_o}^{t} f(u)du$

---

(1) Estamos a seguir o *método de discretização do problema* a que já atrás se aludiu.

(a variável de integração tem de ser, agora, diferente dos símbolos t_o e t). Assim, a função $s = F(t)$ pedida deve ser dada pela fórmula

$$(1) \qquad s = s_o + \int_{t_o}^{t} f(u)dt$$

onde s_o é o valor de s para $t = t_o$ (espaço inicial).

Ora, já sabemos que este integral *existe,* se a função f é contínua. Resta-nos saber se, nesse caso, o referido integral define efectivamente uma primitiva de t, como nos diz a intuição. É o que vamos fazer *em abstracto,* isto é, independentemente do significado concreto das funções.

Seja J um *intervalo qualquer de* $\mathbb{R}$ (fechado ou não, limitado ou não; em particular, pode ser $\mathbb{R}$). Consideremos uma função f contínua em J e seja *a* um ponto qualquer de J. Então, para cada número real $x \in J$, existe um e um só número real y tal que $y = \int_a^x f$ *(porquê?).* Logo, a correspondência

$$x \curvearrowright y = \int_a^x f$$

é uma aplicação de J em $\mathbb{R}$, ou seja uma *função real definida* em J. Designemos essa função por Φ, isto é, ponhamos:

$$(2) \qquad \Phi(x) = \int_a^x f \quad , \quad \forall x \in J$$

Queremos provar que Φ *é uma primitiva de* f *em* J, isto é, queremos provar que (1)

$$\Phi'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in J$$

---

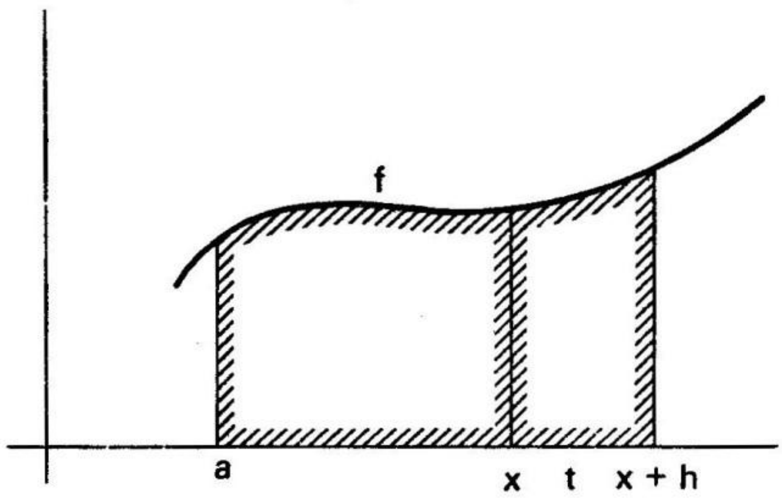
(1) A demonstração é dispensável numa primeira fase. O que mais importa, primeiro, é conhecer bem o enunciado do teorema, que vem a seguir, e saber aplicá-lo.

Equivale isto a provar o seguinte:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x) \quad , \quad \forall x \in J$$

Ora, segundo (2), tem-se:

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f \quad , \quad \forall x, x+h \in J$$



Por outro lado, em virtude do *teorema da decomposição do intervalo*, tem-se:

$$\int_a^{x+h} f = \int_a^x f + S_a^{x+h} f$$

donde:

$$\int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f,$$

ou seja, atendendo a (2):

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f$$

Portanto:

$$(3) \qquad \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h}$$

Suponhamos $h > 0$. Então h é o comprimento do intervalo $[x,x+h]$ e a fórmula (3) diz-nos que a razão incremental considerada é igual ao *valor médio de* f *nesse intervalo*. Portanto, segundo o estabelecido no número anterior, existe pelo menos um ponto t em $[x,x+h]$ tal que [1]

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(t)$$

O que acontece no 2.º membro quando $h \to 0$? Recorde que $x \leqslant t \leqslant x+h$ e que f é *contínua* por hipóteses.

Então $t \to 0$ e $f(t) \to f(x)$, quando $h \to 0$, e portanto:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(h)}{h} = f(x)$$

Analogamente se prova que a razão incremental tende para f(x) quando $h \to 0^-$ [2]. Logo

$$\Phi'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in J, \qquad \text{q. e. d.}$$

---

(1) Precisamos de escolher *um e um só número* nestas condições, o que nos obriga a aplicar o axioma de Zermelo. Este no entanto pode ser evitado, mas não interessa aqui indicar como.

(2) Se x é um dos extremos do intervalo J (caso este pertença a J), só há a considerar *limite lateral* e portanto *derivada lateral* (à direita ou à esquerda, conforme o limite for inferior ou superior).

Assim, ficou demonstrado o seguinte teorema que, pela sua importância, é chamado o 'TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL':

TEOREMA. *Se* f *é uma função contínua num intervalo* J *de* $\mathbb{R}$ *e* a *um ponto de* J, *a função* Φ *definida por*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)du \quad , \quad \forall x \in J$$

é uma primitiva de f *em* J, *isto é, tem-se:*

$$\Phi'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in J$$

A tese deste teorema pode exprimir-se directamente pela fórmula:

$$D_x \int_a^x f(u)du = f(x) \qquad , \qquad \forall x \in J$$

Assim, em particular, ficamos a saber o seguinte: *Toda a função contínua num intervalo admite primitiva nesse intervalo.*

EXEMPLOS:

I. Como se disse no n.º 4, a função e^x/x não pode ser primitivada elementarmente. Mas, segundo o que acabamos de expor, essa função admite primitiva em todo o seu domínio de existência (o conjunto dos pontos $x \neq 0$) por ser aí contínua. Por exemplo, uma sua primitiva no intervalo $J = \,]0,+\infty[$ é a função Φ definida pela fórmula:

$$\Phi(x) = \int_1^x \frac{e^u}{u} du$$

Utilizando um bom computador, não seria difícil *tabelar esta função*. Assim como se calculou o seu valor para $x = 5$ (n.º 6), assim também seria possível construir uma tabela dos valores desta função para sucessivos valores de x bastante próximos, tal como nas tábuas de logaritmos. Mas veremos adiante que existe uma primitiva de e^x/x, chamada 'exponencial integral', que já está tabelada.

II. A função f assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , \text{ para } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ para } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ *(porquê?)*, mas não tem primitiva elementar (cf. n.º 5). Uma sua primitiva é a função transcendente chamada *seno integral* (em abreviatura, Si), assim definida em $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \text{ (}^1\text{)}$$

Esta função encontra-se já tabelada, p. ex. nas «Tables numériques universelles», de MARCEL BOLL (Dunod, Paris).

III. A função f assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log x} & , \text{ para } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ para } x = 0 \end{cases}$$

---

(1) Supõe-se que a função integrada toma o valor 1 para $x = 0$, de acordo com a definição anterior.

é contínua no intervalo J = $[0,1[$, mas também não pode ser primitivada elementarmente. Uma sua primitiva é a função transcendente chamada *logaritmo integral* (em abreviatura Li), definida em J pela fórmula:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log u}\, du$$

Note-se que, a partir desta, é possível primitivar a função e^x/x, no intervalo $]-\infty, 0[$. Com efeito tem-se, utilizando a mudança de variável $x = \log t$ para $t \in [0,1[$:

$$P_x \frac{e^x}{x} = P_t \left[\frac{t}{\log t} \frac{1}{t}\right] = P_t \frac{1}{\log t}$$

$$= \mathrm{Li}(t) + C$$

donde, visto que $x = \log t \Leftrightarrow t = e^x$:

$$P_x \frac{e^x}{x} = \mathrm{Li}(e^x) + C$$

Portanto, $\mathrm{Li}(e^x)$ *é uma primitiva de* e^x/x *no intervalo* $]-\infty, 0[$. Esta nova função transcendente é chamada *'exponencial integral'* e designada pelo símbolo Ei, isto é:

$$\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{Li}\,(e^x) \quad , \quad \forall x \in]-\infty \quad , \quad 0[$$

A função $\mathrm{Ei}(x)$ é prolongada, como primitiva de e^x/x, ao intervalo $]0, +\infty[$, por um processo que indicaremos mais adiante.

Há tabelas que dão directamente os valores da exponencial integral (p. ex., as de Marcel Boll já citadas) e outras que dão os valores do logaritmo integral.

12. **Fórmula de Barrow.** Seja ainda J um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$, f uma função contínua em J e *a* um ponto arbitrário de J. Então, como vimos, a função

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)du$$

é uma primitiva de f em J. Portanto, se F é outra primitiva de f em J, tem-se:

$$F(x) = \Phi(x) + C \qquad \text{(com C constante)}$$

ou seja:

$$F(x) = C + \int_a^x f(u)du \qquad (\forall x \in J)$$

Ora, para $x = a$, o integral do 2.º membro é igual a 0. Logo, substituindo x por *a* em ambos os membros, vem:

$$F(a) = C$$

e, portanto:

$$\boxed{F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)du \quad , \quad \forall x \in J}$$

Sendo *b* um dado ponto de J, virá, em particular:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(u)du,$$

donde:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Esta importante fórmula, chamada 'FÓRMULA DE BARROW' (do nome do célebre professor de NEWTON), permite, como se vê, achar o integral de f entre *a* e *b*, *quando se conhece uma primitiva qualquer* F *de* f *nesse intervalo;* isto é:

O integral de f *entre* a *e* b *é igual ao valor da primitiva em* b *menos o valor da primitiva em* a.

Esta diferença também se costuma designar pela notação $[F(x)]_{x=a}^{b}$, ou simplesmente por $F(x)\,|_{a}^{b}$ e, assim, a fórmula de Barrow toma o aspecto:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b$$

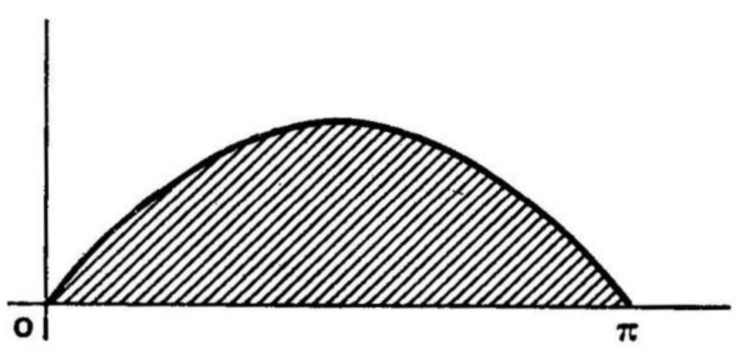
EXEMPLOS:

I. Calcular o integral de sen x entre 0 e π. Como uma das primitivas de sen x é $-\cos x$, virá:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\,|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= -1 - (-1) = 2$$

Note-se que, por ser $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ em $[0, \pi]$, este integral dá-nos a área do trapezóide definido pela função *seno* neste intervalo.



II. Calcular o integral de sen x/x entre 0,5 e 3. Como vimos no número anterior, uma primitiva desta função é Si(x). Logo

$$\int_{0,5}^{3} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \mathrm{Si}(3) - \mathrm{Si}(0{,}5)$$

As referidas tábuas de Marcell Boll dão:

$$\mathrm{Si}(0{,}5) = 0{,}4931 \quad , \quad \mathrm{Si}(3) = 1{,}8487$$

Daqui o valor aproximado do integral, a menos de 0,0002:

$$1{,}8487 - 0{,}4931 = 1{,}3556$$

III. Calcular o integral de e^x/x entre 1 e 5.

Como vimos no número anterior, uma primitiva desta função é Ei(x) (exponencial integral de x). Tem-se, pois:

$$\int_{1}^{5} \frac{e^x}{x}\, dx = \mathrm{Ei}(5) - \mathrm{Ei}(1)$$

Ora, as referidas tábuas dão, *até às décimas milésimas:*

$$\mathrm{Ei}(5) = 40{,}1853 \quad , \quad \mathrm{Ei}(1) = 1{,}8951,$$

donde, o valor aproximado:

$$40{,}1853 - 1{,}8951 = 38{,}2902$$

para o referido integral. Este valor tem, pelo menos, 5 algarismos exactos, que coincidem com os determinados no n.º 7, por cálculo numérico directo. O algarismo exacto das décimas milésimas será

0 ou 1 ou 2 ou 3; o integral está, pois, calculado a *menos de 2 décimas milésimas.*

EXERCICIOS — I. Calcular:

1) $\int_0^{2\pi} (x + \operatorname{sen} x)\, dx$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

3) $\int_2^3 \frac{(x+1)\, dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

4) $\int_0^x (1 + t + t^2) dt$

5) $\int_{-1}^{2x} (1 + t + t^2) dt$

6) $\int_1^{1-x} (1 - 2t + 3t^2) dt$

7) $\int_x^{x^2} (t^2 + 1)^2 dt$

8) $\int_x^{x^2} (t^2 + \operatorname{sen} 3t) dt$

9) $\int_0^x \operatorname{sen}^2 t\, dt$

10) $\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\, dt$

OBS.: Usar as fórmulas de Euler neste último exercício.

II. Calcular com auxílio de tábuas ou da régua de cálculo:

11) $\int_0^2 \frac{x}{1 + x^2} dx$

12) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + 4x^2}$

13) $\int_0^3 1{,}23^x dx$

14) $\int_1^3 x\, e^x\, dx$

III. Na decomposição da sacarose em dextrose e levulose, a quantidade dx de açúcar convertido num intervalo de tempo $[t, t + dt]$ é proporcional à quantidade de açúcar não convertido e a dt. Será pois $dx = k(a - x) dt$, em que *a* é a quantidade inicial de açúcar, x a quantidade de açúcar já convertido no instante t e k o coeficiente de proporcionalidade. Calcular o tempo necessário para converter uma quantidade de açúcar $m < a$.

IV. Numa *reacção bimolecular*, em que são postos em presença dois compostos para formar dois novos compostos, a fórmula de transformação é:

$$dx = k(a-x)\,(b-x)\,dt,$$

em que *a* e *b* são as quantidades iniciais das moléculas de cada um dos compostos, x a quantidade de uma das substâncias transformada até ao instante t, e k uma constante dependente da concentração. Calcular o tempo necessário para transformar uma quantidade *m* de uma das substâncias. Para a primitivação, note que

$$\frac{1}{(a-x)\,(b-x)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right)$$

Respostas: I. 1) $2\pi^2$; 2) π ; 3) $\sqrt{18} - \sqrt{11}$;
4) $x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}$; 5) $\frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + \frac{5}{6}$; 6) $-2x + 2x^2 - x^3$;
7) $\frac{1}{5}x^{10} + \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x$;
8) $\frac{1}{3}(x^6 - x^3 + \cos 3x - \cos 3x^2)$; 9) $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$;
10) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x)\cos x$.

III. $t = \frac{1}{k}\log\frac{a}{a-m}$; IV. $t = \frac{1}{k(b-a)}\log\frac{a(b-m)}{b(a-m)}$

NOTAÇÃO DE LEIBNIZ PARA AS PRIMITIVAS. Como vimos, se f é uma função contínua num intervalo J e *a* um ponto qualquer de J, a expressão $\int_a^x f(t)dt$ representa uma primitiva de f. Daqui a ideia de representar pela notação

$$\int f(x)dx$$

uma *primitiva qualquer* de f e de lhe chamar *integral indefinido* de f (por não estarem *definidos* os extremos de integração). Por exemplo, tem-se:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

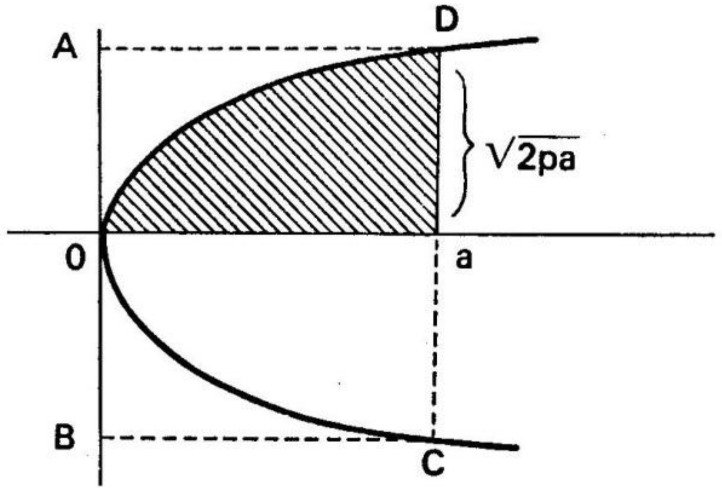
$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \quad , \quad \text{etc.}$$

Esta notação para as primitivas é devida a Leibniz e é usada correntemente. Convém, por isso, que o aluno se habitue também a usá-la.

Também se diz muitas vezes 'integrar' no sentido de 'primitivar'.

13. **Cálculo de áreas.** Uma das aplicações da teoria exposta encontra-se no cálculo de áreas de figuras planas. Vamos ver dois exemplos:

I. *Calcular a área da figura limitada pela parábola* $y^2 = 2px$ *e pela recta* $x = a$, *sendo* a *e* p *números positivos dados (em referencial ortonormal).*



Como neste caso o eixo dos x é eixo de simetria da parábola, bastará calcular a área da metade superior e multiplicar o resultado por 2. Mas a metade superior é o trapezóide definido pela função $\sqrt{2px}$ no intervalo $[0,a]$. Logo a sua área é o integral dessa função entre 0 e a. Ora

$$P_x \sqrt{2px} = \sqrt{2p}\, P_x \sqrt{x} = \sqrt{2p}\, P_x\, x^{1/2} = \sqrt{2p}\, \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{2px^3}$$

Logo

$$\int_0^a \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} \sqrt{2px^3}\, \Big|_0^a = \frac{2}{3} \sqrt{2pa^3}$$

e a área pedida será:

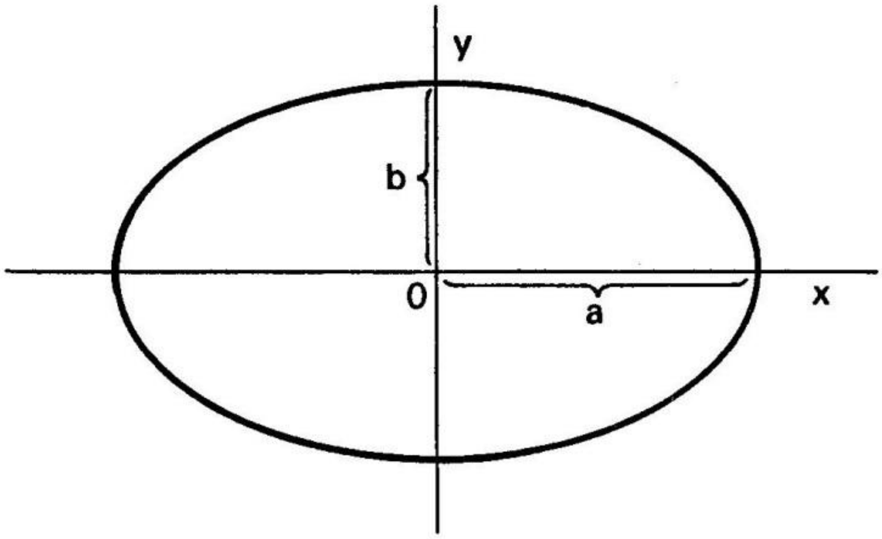
$$A = \frac{4}{3} \sqrt{2pa^3}$$

Note-se que a área do rectângulo $[ABCD]$ é:

$$a.2\sqrt{2pa} = 2\sqrt{2pa^3}$$

Logo, a área segmento da parábola é igual a 2/3 *da área deste rectângulo.*

II. *Calcular a área limitada por uma elipse de semi-eixos* a e b *(em referencial ortonormal).*



Já sabemos que a equação da elipse reduzida aos eixos é:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e, visto que, neste caso, os eixos coordenados são eixos de simetria da figura, basta calcular a área da parte situada no 1.º quadrante e multiplicar o resultado por 4. Ora, resolvendo (2) em ordem a y, para $y > 0$, obtém-se:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

e a parte da figura situada no 1.º quadrante é o trapezóide definido por esta função em $[0,a]$. Temos, pois, de procurar uma primitiva desta função. Para isso, usaremos a substituição:

$$x = a \text{ sen } t \quad , \quad \text{com} \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Como $\dfrac{dx}{dt} = a \cos t$, vem:

$$P_x\sqrt{a^2 - x^2} = P_t(\sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2 t} \cdot a \cos t)$$

$$= P_t(\sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cdot a^2 \cos t) = a^2 P_t \cos^2 t$$

$$= a^2 P_t\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\text{sen } 2t}{2}\right)$$

Mas $t = \text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}$, $\text{sen } 2t = 2 \text{ sen } t \cos t = 2\dfrac{x}{a}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$

Logo

$$P_x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

Portanto, vem:

$$\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} P_x \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^a = \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi a b}{4},$$

visto que

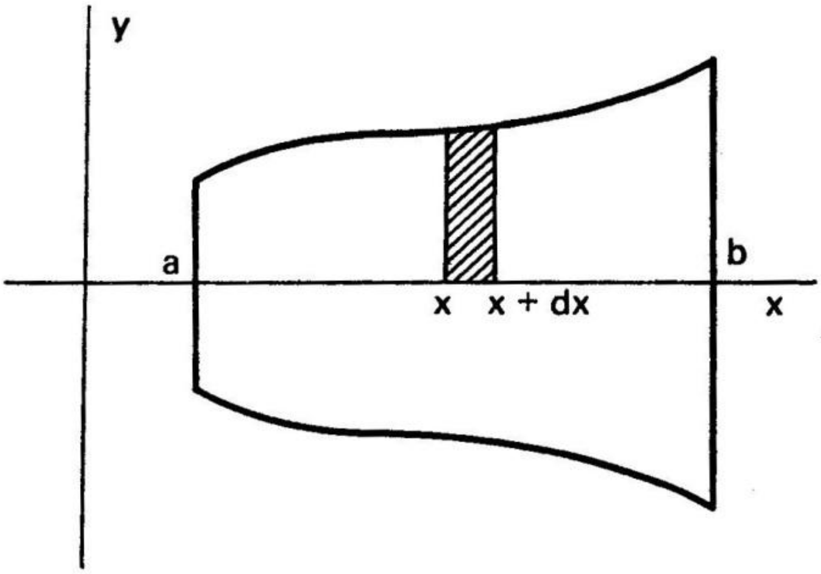
$$\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ se } x = a \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}, \quad \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 0 \quad \text{para } x = a, x = 0.$$

Logo, a área pedida é:

$$A = \pi a b$$

Em particular, se $a = b$ (círculo), tem-se $A = \pi a^2$.

14. **Cálculo de volumes.** A teoria do integral aplica-se também ao cálculo de volumes. Começaremos pelo caso de sólidos de revolução.



Consideremos o trapezóide definido por uma função contínua f num intervalo [a,b], supondo f não negativa nesse intervalo. Quando roda em torno do eixo dos x, este trapezóide gera um *sólido de revolução*. Para ver como se pode calcular o volume deste, vamos seguir o *método heurístico dos infinitésimos*. Consideremos um ponto x qualquer de [a,b]. Sendo dx um acréscimo infinitésimo ([1]), f(x) pode considerar-se *constante* no intervalo [x,x + dx]. Deste modo, a porção do trapezóide compreendida entre as rectas verticais de abcissas x e x + dx pode considerar-se um *rectângulo*. Por sua vez, este gera por rotação em torno do eixo dos x um *cilindro de revolução*, cujo raio da base é $y = f(x)$ e cuja altura é dx. O volume deste *cilindro infinitésimo* será, portanto:

$$\pi y^2 \, dx = \pi \, [f(x)]^2 \, dx$$

Ora, o volume do sólido de revolução, de que estamos a tratar, deve ser *a soma de todos estes infinitésimos desde* $x = a$ *até* $x = b$; isto é, o volume procurado será:

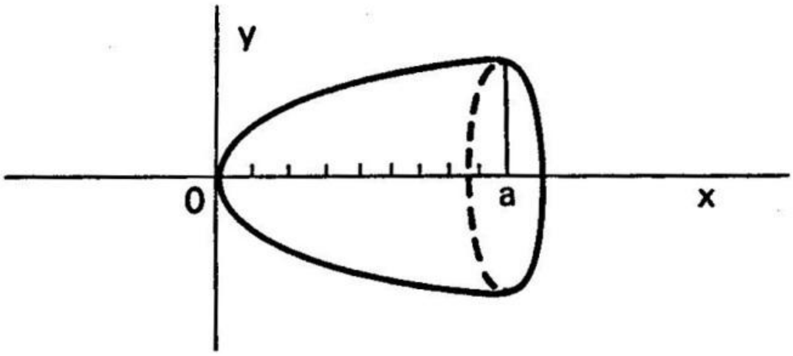
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

([1]) Por 'infinitésimo', deve entender-se aqui 'bastante pequeno'.

NOTA. É claro que estivemos a usar deliberadamente a linguagem abreviada dos infinitésimos, para habituar o aluno a este método heurístico, correntemente usado em ciências da natureza. Mas não é difícil imaginar um método mais rigoroso que consiste no seguinte: considerar o sólido decomposto em fatias por planos perpendiculares ao eixo em número *finito*; substituir depois essas fatias por cilindros que delas se aproximam, somar os volumes dos cilindros e passar ao limite, quando o número dos cilindros tende para infinito, de modo que as alturas tendam conjuntamente para zero.

EXEMPLOS:

I. Consideremos o trapezóide definido pela função $\sqrt{2px}$ no intervalo $[0,a]$. Este trapezóide gera, por rotação em torno do eixo dos x, um *segmento de parabolóide de revolução*.

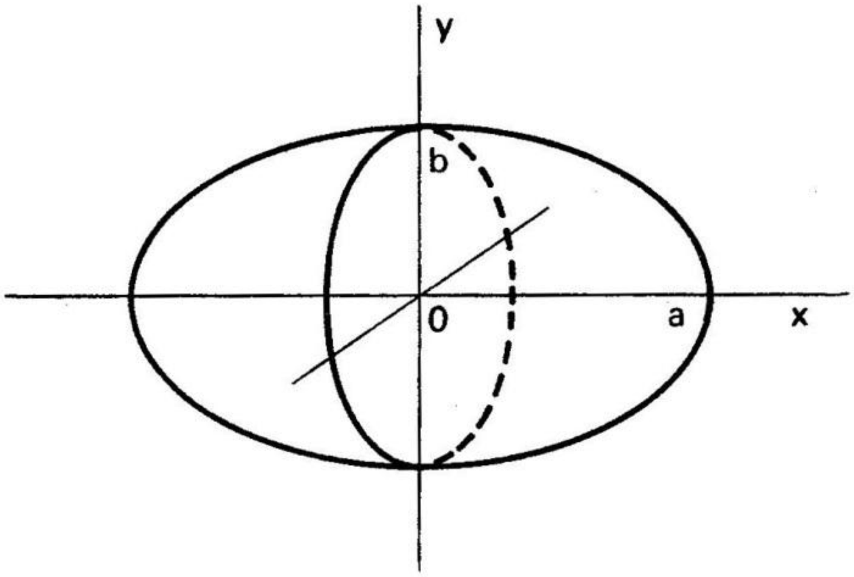


O volume deste sólido será:

$$V = \pi \int_0^a y^2\, dx = \pi \int_0^a 2\,px \cdot dx = \pi\, px^2 \Big|_0^a = \pi\, p\, a^2$$

II. Achar o volume do elipsóide de revolução cuja superfície é gerada pela rotação da elipse em torno do eixo dos x de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(É, agora, indiferente que se tenha $a \geqslant b$ ou $a \leqslant b$; se $a > b$ o elipsóide é *alongado*; se $a < b$, é *achatado*; se $a = b$ reduz-se a uma esfera.)

Basta achar o volume gerado pelo trapezóide que a função

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{define no intervalo } [0,a]$$

e multiplicar o resultado por 2. O volume pedido será, pois:

$$V = 2\pi \int_0^a y^2\,dx = 2\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$

ou seja:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, ab^2$$

Se $a = b$ (esfera de raio *a*), tem-se $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

NOTA. Quando o sólido não é de revolução, o volume pode achar-se de modo inteiramente análogo pela fórmula

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx ,$$

em que A(x) designa a área da secção feita pelo plano de abcissa x, perpendicular ao eixo dos x. Por exemplo, no caso do elipsóide,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

a secção feita pelo plano de abcissa x é limitada pela elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} ,$$

cujos semi-eixos são:

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad e \quad \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

A área da secção será portanto (cf. n.º 12, exemplo II):

$$A(x) = \pi \frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2) ,$$

donde:

$$V = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

ou seja:

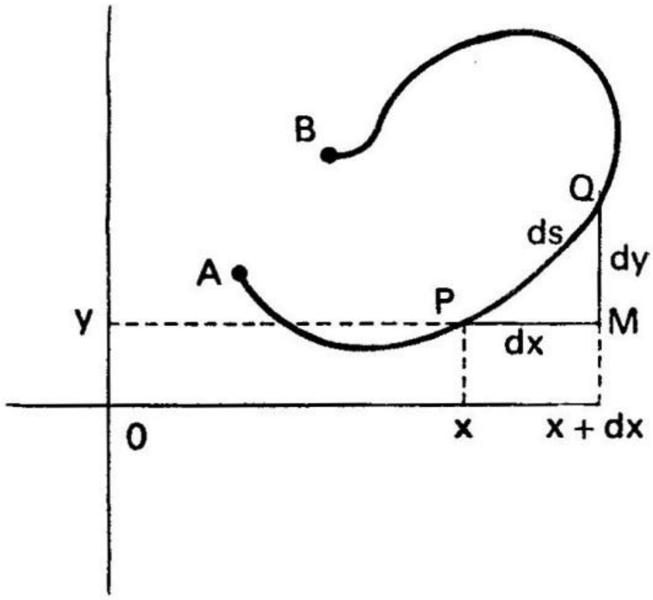
$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$

15. **Cálculo do comprimento de curvas.** Consideremos uma linha plana C definida por um sistema de *equações paramétricas:*

$$(1) \qquad x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t),$$

em que φ e ψ são funções contínuas num intervalo $[\alpha,\beta]$. *Nos casos concretos,* o parâmetro t é a variável tempo; neste caso, as equações (1) definem o movimento de um ponto no plano, durante o intervalo de tempo $[\alpha,\beta]$, e a linha C é a *trajectória* do movimento, cuja *equação cartesiana* pode ser obtida eliminando t entre as duas equações (1).

Para ver como pode ser calculado o comprimento de C, *vamos supor que as funções* φ, ψ *admitem a derivada contínua no intervalo* $[\alpha, \beta]$.



Seja então t um número qualquer do intervalo $[\alpha, \beta]$ e seja P o ponto de coordenadas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Adoptemos, agora, o *método heurístico dos infinitésimos.* A um acréscimo infinitésimo dt de t correspondem acréscimos infinitésimos de x e de y, *equivalentes aos diferenciais:*

$$(2) \qquad dx = \varphi'(t)dt \quad , \quad dy = \psi'(t)dt$$

Seja Q o ponto de coordenadas $x + dx$, $y + dy$. Então Q é *infinitamente próximo* de P; deste modo, o arco $\overset{\frown}{PQ}$ da linha C confunde-se com a respectiva corda PQ e, portanto, o seu comprimento equivale ao infinitésimo ds, dado pela hipotenusa de um triângulo rectângulo, cujos catetos são $|dx|$ e $|dy|$. Assim:

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2}$$

ou seja, para $dt > 0$[1]:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

donde, atendendo a (2):

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$$

ou, mais simplesmente, pondo $\dot{x} = \varphi'(t)$, $\dot{y} = \psi'(t)$[2]:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt$$

---

(1) Convenciona-se que o comprimento s cresce com o parâmetro t.

(2) As notações tais como $\dot{x}$, $\dot{y}$, devidas a Newton, são ainda hoje muito usadas para designar derivadas, e convém que o aluno também se habitue a tais notações.

Este infinitésimo ds é chamado *elemento de comprimento da linha*. O comprimento integral, s, da linha será, pois, a *soma de todos estes elementos desde* $t = \alpha$ *até* $t = \beta$, ou seja:

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt}$$

Tratando-se de uma linha C do espaço definida por um sistema de três equações paramétricas:

$$(2) \qquad x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad , \quad z = \chi(t) \; ,$$

sendo φ, ψ, χ definidas num intervalo $[\alpha, \beta]$, as considerações são perfeitamente análogas. Supondo que φ, ψ, χ admitem derivada contínua em $[\alpha, \beta]$, *o elemento de comprimento* ds, em referencial ortonormal, é dado pela fórmula:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

e o comprimento total será:

$$s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

NOTA: — I. A demonstração rigorosa dos resultados assim obtidos heuristicamente é mais difícil que no caso das áreas e dos volumes. Por isso, nos abstemos de a esboçar aqui.

II. No caso em que as equações (1) definem um movimento, sendo t a variável tempo e $\alpha = 0$, o espaço s percorrido desde o instante α até ao instante t será:

$$(3) \qquad s = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2}\, du \ (^1),$$

o que nos dá o espaço s, como função de tempo, t:

$$s = f(t) \ (^2)$$

Neste caso, a velocidade v em cada instante t será:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$$

Analogamente para movimentos no espaço.

III. Em alguns casos de linhas no plano, o parâmetro *t* pode ser uma das coordenadas, por exemplo x. Então, as equações paramétricas são da forma $x = t$, $y = f(t) = f(x)$, as derivadas em ordem a t são $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = f'(x)$ e o comprimento total será, pois:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

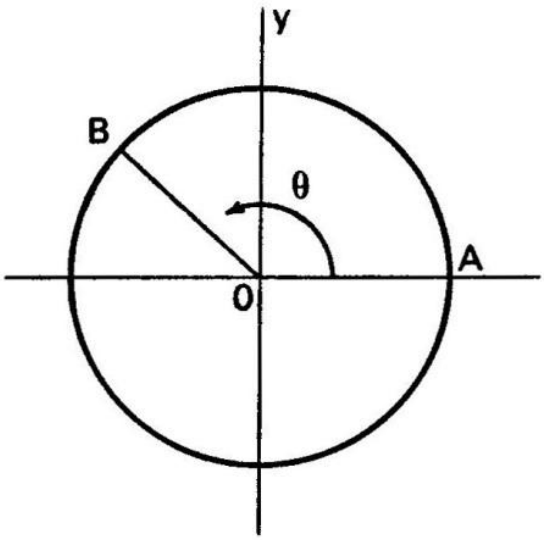
EXEMPLOS:

I. *Calcular o comprimento da linha de equações paramétricas* $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$ *(sendo* r *uma constante positiva), num intervalo* $[0, \theta]$.

---

[1] A variável de integração, u, tem de ser diferente do índice superior t.

[2] Se o *espaço inicial*, s_0, é diferente de zero, convém pôr $s - s_0$ em vez de s no 1.º membro de (3)



Eliminando t entre as duas equações, obtém-se:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

A linha será, pois, uma circunferência, *se* $\theta = 2\pi$. No caso geral, será um arco de círculo $\widehat{AB}$, cuja medida em radianos é θ. Derivando x e y em ordem a t, vem:

$$\dot{x} = -\, r \operatorname{sen} t \quad , \quad \dot{y} = r \operatorname{sen} t$$

donde:

$$s = \int_0^\theta \sqrt{x^2 + y^2}\, dt = \int_0^\theta \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \int_0^\theta r\, dt$$

e, portanto:

$$s = rt\Big|_0^\theta = r\,\theta$$

isto é: *o comprimento do arco é igual ao produto do raio pela medida do arco em radianos,* o que está de acordo com o que já era conhecido.

II. *Calcular o comprimento da linha de equações paramétricas* $x = a \operatorname{sen} t$, $y = b \cos t$ *(sendo* a *e* b *constantes positivas), num intervalo* $[0, \theta]$.

Eliminando t entre as equações, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A linha será uma elipse, se $\theta = 2\pi$, e reduz-se a uma circunferência, se além disso $a = b$ (caso anterior). No caso geral, a linha é um arco de elipse. Temos, agora:

$$\dot{x} = a \cos t \quad , \quad \dot{y} = -\, b \operatorname{sen} t$$

donde:

$$ds^2 = (a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t)\, dt^2$$

Ora, se pusermos:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k \quad \text{(excentricidade da elipse)}$$

tem-se: $\quad 0 \leqslant k < 1 \quad , \quad a^2 - b^2 = a^2 k^2 \quad , \quad b^2 = a^2 (1 - k^2)$

e, portanto:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[a^2 \cos^2 t + a^2 (1 - k^2) \operatorname{sen}^2 t\right] dt^2 \\ &= a^2 (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)\, dt^2 \end{aligned}$$

Logo, o comprimento pedido será dado pelo integral:

$$s = a \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

Mas, prova-se que a função integranda não pode ser primitivada elementarmente, sendo necessário, portanto, recorrer a métodos numéricos de aproximação para o cálculo do integral (neste caso pode aplicar-se o método de integração por séries, a que faremos referência mais adiante).

O integral considerado define uma *função de duas variáveis,* θ *e* k:

$$E(\theta,k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

chamada *integral elíptico de 2.ª espécie.* Para dar uma ideia da sua importância, bastará lembrar que intervém no cálculo de percursos em *trajectórias elípticas,* de que são bem conhecidos exemplos concretos, relativos a planetas e satélites artificiais.

Dada a frequência e variedade das suas aplicações, esta função encontra-se extensamente tabelada. Habitualmente põe-se k sob a forma $k = \operatorname{sen} \varphi$ (tem-se $0 < k < 1$). Das «Tabelas Numéricas» de A. César de Freitas (I. A. C.), extraímos a seguir uma pequena parte da tabela desta função, para dar uma ideia de como está organizada:

φ	$\theta = 0$	$\theta = 5°$	$\theta = 10°$	
31°	0,54105	0,54086	0,54030	...
32	0,55851	55830	55768	...
33	0,57596	57573	57506	...

Nesta tabela os valores da função são dados a menos de 10^{-5}, para valores de φ de grau em grau, desde 1 até 90°, e valores de θ de 5 em 5 graus, desde 0 até 90°.

NOTAS — I. Interpretando t como a variável *tempo*, as equações $x = a \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$ definem *separadamente*, movimentos vibratórios simples, de amplitudes *a,b* e pulsação 1, segundo o eixo dos x e o eixo dos y, respectivamente. O sistema das duas equações define o *movimento resultante* dos dois primeiros. A *trajectória*, como se viu, é elíptica, e a *equação dos espaços* é:

$$s = a\,E(t,k) \quad , \quad \text{supondo } s_0 = 0.$$

II. Chama-se *integral elíptico de* 1.ª *espécie* a função F de duas variáveis definida pela fórmula:

$$F(\theta,k) = \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}\,dt \qquad (0 \leqslant k < 1)$$

Tal como o integral elíptico de 2.ª espécie, esta função tem numerosas aplicações e encontra-se extensamente tabelada, com k na forma $\operatorname{sen}\varphi$. Estas duas funções estão relacionadas com uma classe muito importante de funções transcendentes, de variável complexa, duplamente periódicas, chamadas *funções elípticas*.

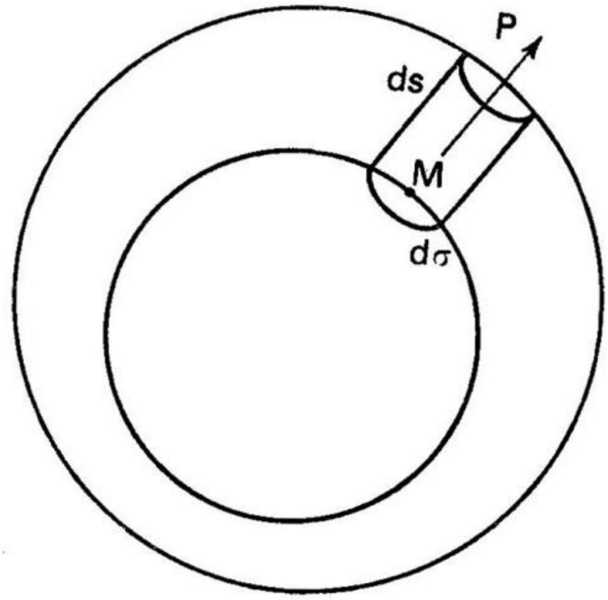
16. **Novos exemplos da física*.** O conceito de integral intervém a cada passo em questões concretas de física, química, biometria, econometria, etc. Vamos estudar mais dois exemplos da física.

EXEMPLO I *(Trabalho produzido pela expansão de um gás: por exemplo, num motor de explosão)*. Calculemos o trabalho produzido pelas forças de expansão de um gás, cujo volume aumenta de v_1 para v_2, supondo que se mantém constante a sua temperatura.

Já sabemos que, *em primeira aproximação,* se pode adoptar a EQUAÇÃO DOS GASES PERFEITOS:

$$(1) \qquad pv = KT,$$

sendo p a pressão, v o volume, T a temperatura absoluta e K uma constante dependente do gás.



Seja M um ponto genérico da superfície que, num dado instante t, limita o gás; e seja p a pressão em M, $d\sigma$ um *elemento de área* em torno de M (área de uma superfície infinitésima a que pertença M) e ds o *deslocamento elementar de* M, quando o gás passa do volume v ao volume *infinitamente próximo* v + dv.

Então a força exercida pelo gás em $d\sigma$ será $pd\sigma$ (produto da pressão pela área) e o trabalho efectuado pela referida força será o *produto desta pelo deslocamento,* ou seja:

$$p\, d\sigma\, ds = p\, d\omega$$

em que $d\omega$ é o *volume do cilindro de base* $d\sigma$ *e altura* ds.

Admitindo, agora, que a pressão p é a mesma em todos os pontos da superfície em cada instante t, o trabalho efectuado quando o gás passa do volume v ao volume v + dv, será:

$$(2) \qquad dW = p\,dv$$

vis o que dv é a soma de todos os volumes elementares $d\omega$. Por conseguinte, o trabalho efectuado na passagem de v a v + dv será, atendendo a (2) e a (1):

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{KT}{v}\,dv = K\,T \ln v \Big|_{v_1}^{v_2}$$

isto é:

$$W = K\,T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

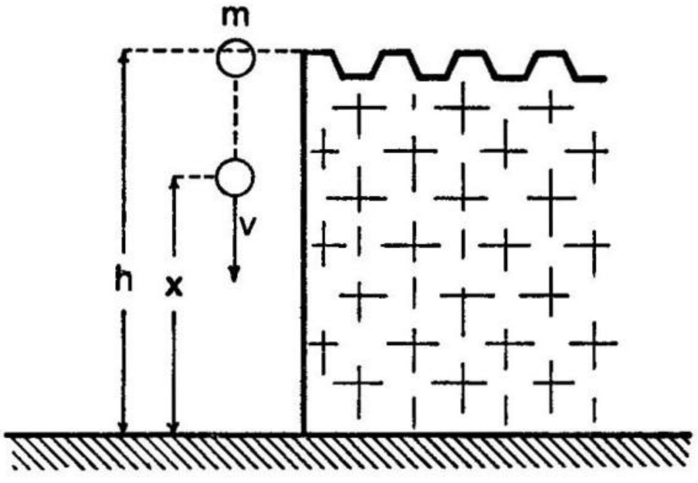
Vemos, aqui, mais um exemplo típico de aplicação daquilo a que chamámos *métodos abreviados de cálculo e raciocínio*.

Numa segunda aproximação, pode usar-se, em vez da equação dos gases perfeitos, a EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS:

$$(p + \frac{a}{v^2})\,(v - b) = R\,T$$

Deixa-se ao cuidado do leitor a resolução do problema com esta fórmula, começando por exprimir p como função de v (com a, b, R e T constantes).

EXEMPLO II *(Dedução da fórmula do pêndulo simples)*. Como é sabido, uma das ideias centrais que têm norteado, com êxito, todo o desenvolvimento da física, é o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA [1].



Por exemplo, quando se deixa cair uma pedra de massa *m* do alto de uma torre de altura *h, a energia potencial da pedra em relação ao nível do solo* é, por definição, igual ao trabalho necessário para elevar a pedra desde o solo até ao cimo da terra, ou seja o *produto do peso,* p, *da pedra por* h. Como $p = mg$ (em que g é a aceleração da gravidade), a energia potencial da pedra ao ser largada será:

$$U_0 = p\,h = mg\,h$$

Num instante t em que a pedra se encontre à distância x do solo, a energia potencial será $U = mg\,x$. A energia potencial perdida,

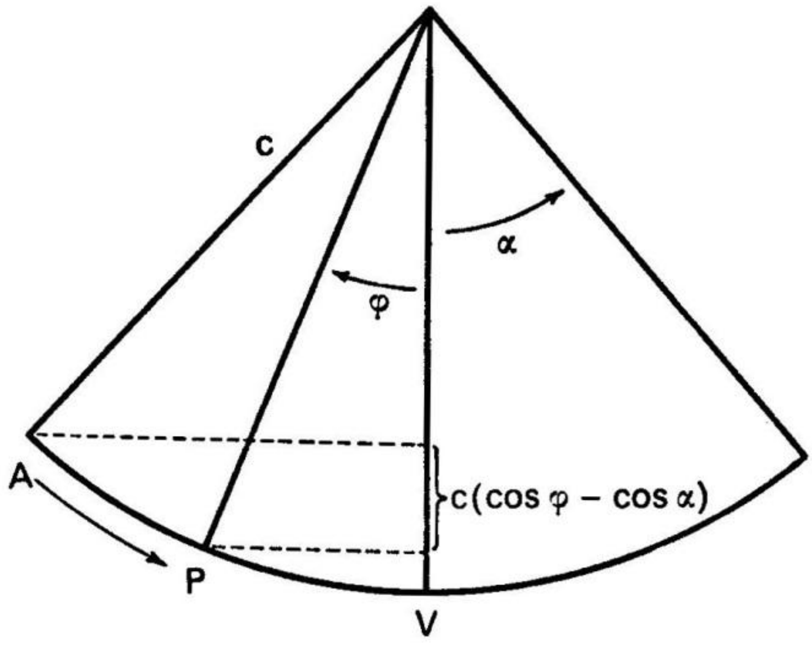
---

(1) Alargado com o PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE A MASSA E A ENERGIA, de Einstein.

$U - U_0$, foi então transformada em *energia cinética,* $T = \frac{1}{2} mv^2$, admitindo que a resistência do ar é desprezável. Tem-se, pois, $U_0 - U = T$, ou seja:

$$mg\,(h - x) = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Quando a pedra chega ao solo, toda a sua energia cinética acaba por ser transformada em calor ([1]). Porém, no caso ideal de um choque elástico (caso que se verifica parcialmente quando, por exemplo, uma bola de bilhar cai sobre um chão de mármore), o corpo salta até ao nível inicial, para tornar a cair, e assim sucessivamente, *conservando-se constante a energia mecânica total,* $E = U + T$.



([1]) Recordemos que, nas centrais hidroeléctricas, a energia cinética da água é, em grande parte, convertida em *energia eléctrica.* Por sua vez, nas centrais nucleares, em que se dá a cisão do núcleo do urânio, uma parte da *massa* deste é convertida, segundo a fórmula $E = mc^2$ de Einstein, numa quantidade proporcionalmente enorme de energia calorífica, que vai aquecer a água do reactor e é depois transformada em *energia eléctrica.*

Ora, é esse também o caso ideal de um *pêndulo simples,* em que se despreza o atrito. Suponhamos que um pêndulo OP é desviado para a posição OA, em que faz o ângulo α com a vertical, e largado depois (sem impulso). Seja φ o ângulo de OP com a vertical num dado instante t. Então, na passagem de A para P, a *diminuição de altura* (em relação ao solo, por exemplo), será $c(\cos\varphi - \cos\alpha)$, designando por *c* o comprimento do pêndulo. Portanto, a *diminuição de energia potencial* do pêndulo será:

$$(1) \qquad m\,g\,c\,(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

sendo *m* a massa do ponto material P. Por outro lado, designando por *s* o comprimento do arco $\widehat{VP}$, tem-se $s = c\,\varphi$. Portanto, no instante t, a velocidade de P será $\frac{ds}{dt} = c\,\frac{d\varphi}{dt}$ e a sua energia cinética:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,c^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Como esta deve ser igual a (1), segundo o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA, virá:

$$\frac{1}{2}c^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = g\,c(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

donde se deduz a *derivada de* t *em ordem a* φ:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{c}{2g}}\;\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$$

Daqui podemos agora deduzir, por integração, *o tempo de uma oscilação simples,* isto é, o tempo T necessário para o pêndulo ir da posição OA até à posição simétrica, OA'. Tem-se, com efeito:

$$(2) \qquad T = \sqrt{\frac{c}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}}$$

visto que, nesta passagem, t varia de $-\alpha$ a α (tomando para positivo o sentido indicado na figura).

Vamos, agora, ver como a fórmula (2) se pode reduzir a um *integral elíptico de* 1.ª *espécie* (cf. n.º 14, exemplo II). Comecemos por notar que

$$(3) \qquad \cos\varphi - \cos\alpha = \left(1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\left(\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

Ponhamos agora $\text{sen}\,\dfrac{\alpha}{2} = k$ e façamos a mudança de variável:

$$(4) \qquad \text{sen}\,\frac{\varphi}{2} = k\,\text{sen}\,\theta$$

Daqui, diferenciando, vem:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = k\cos\theta\,d\theta \;\therefore\; d\varphi = \frac{2k\cos\theta}{\cos\frac{\varphi}{2}}\,d\theta$$

e, atendendo a (3):

$$(6) \qquad \sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha} = \sqrt{2(k^2 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta)} = k\sqrt{2}\cos\theta$$

Entrando com (5) e (6) em (2) e notando que, em virtude de (4), θ varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$ quando φ varia de $-\alpha$ a α, vem:

$$T = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}}$$

Finalmente, decompondo o intervalo de integração em $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$, e notando que os integrais nestes intervalos são iguais (mudando θ em $-\theta$), vem, finalmente:

$$(7) \qquad T = 2\sqrt{\frac{c}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}}$$

ou seja:

$$T = 2\sqrt{\frac{c}{g}}\, F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Em particular, se α for suficientemente pequeno, pode desprezar-se k, e de (7) resulta a conhecida FÓRMULA DE GALILEU:

$$(8) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{c}{g}}$$

17. **Propriedades em que se baseia o cálculo numérico de integrais*.** Agora que já se tem, com os exemplos anteriores, uma ideia da extraordinária importância do cálculo integral, interessa ver em que consistem, nas suas linhas gerais, as *técnicas de cálculo numérico de integrais.*

Sendo os integrais limites de somas, várias propriedades da adição se transmitem aos integrais, por passagem ao limite. Por exemplo, vimos que, se f é uma função integrável num intervalo $[a,b]$, o integral de f neste intervalo pode ser obtido como limite das somas

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p)\, h,$$

onde $h=(b-a)/n$ e $x_p = a + ph$, para $p=0$, 1 , ... , $n-1$.

Ora

$$|S_n| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} |f(x_p)|\, h \quad \text{(propriedade do módulo da soma)}$$

donde, passando ao limite, quando $n \to \infty$:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

ou ainda, em notação abreviada:

$$(1) \qquad \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

Por palavras: *O módulo do integral de uma função é inferior ou igual ao integral do módulo da função.*

De modo análogo se reconhece o seguinte:

Se f *e* g *são integráveis em* $[a,b]$ *e se* $f \leqslant g$ *neste intervalo, então*

(2) $$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

Em particular, se $|f(x)| \leqslant M$ em $[a,b]$, sendo M uma constante finita, deduz-se de (1) e (2) a seguinte FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO INTEGRAL:

(3) $$\left| \int_a^b f \right| \leqslant M\,(b-a),$$

visto que o integral da constante M em $[a,b]$ é $M\,(b-a)$.

Por outro lado, da definição de integral deduz-se facilmente a seguinte propriedade:

Se f *e* g *são funções integráveis em* $[a,b]$, *e se* k *é uma constante, também* $f+g$ *e* kf *são integráveis em* $[a,b]$ *e tem-se:*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad , \quad \int_a^b kf = k \int_a^b f$$

Daqui resulta, em particular:

(4) $$\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

Seja agora ε um majorante de $|f-g|$ em $[a,b]$, isto é:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

Então, de (3) e da fórmula de majoração (3) deduz-se:

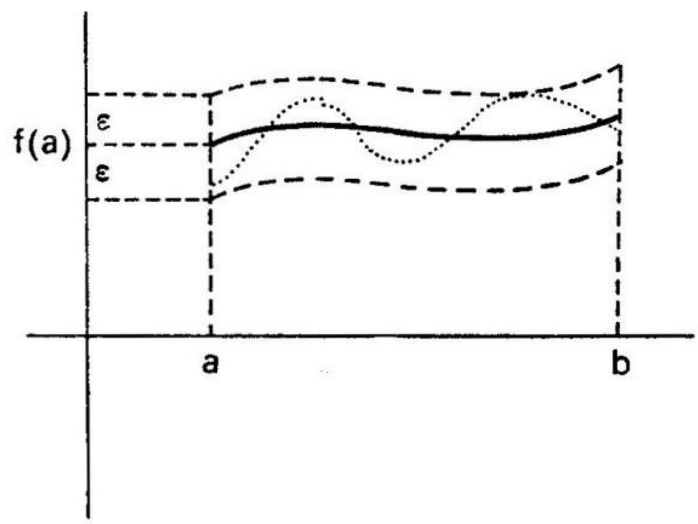
$$(5) \qquad \boxed{\left| \int_a^b f - \int_a^b g \right| \leqslant (b-a)\,\varepsilon}$$

A ideia fundamental do cálculo numérico de integrais consiste em substituir a função integranda f por uma função g *mais fácil de integrar e bastante próxima de* f. Então (5) é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO ERRO DO INTEGRAL, desde que se adopte a seguinte

DEFINIÇÃO 1. Sendo ε um número positivo, diz-se que a função g é *aproximada de* f *a menos de* ε *em* $[a,b]$, *sse*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$

Na mesma hipótese, chama-se *vizinhança* (ε) *de* f em $[a,b]$ ao conjunto de todas as funções φ aproximadas de f a menos de ε nesse intervalo.



Designaremos por V_ε (f) este conjunto (ler: 'vizinhança (ε) de f'). Geometricamente, V_ε (f) é constituída por todas as funções cujos gráficos estão compreendidos entre os gráficos de $f(x) + \varepsilon$ e de $f(x) - \varepsilon$ [1]. Posto isto, é fácil resolver o seguinte

PROBLEMA: *Dado um número* $\delta > 0$, *determinar um número* $\varepsilon > 0$, *tal que, se a função* g *é aproximada de* f *a menos de* ε, *então* $\int_a^b g$ *é aproximado de* $\int_a^b f$ *a menos de* δ (supondo que f e g são integráveis em $[a,b]$).

Aplicando a fórmula (5) e pondo $\varepsilon\,(b-a) \leqslant \delta$, vê-se que basta tomar

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{b-a},$$

para que o problema esteja resolvido.

Assim, em conclusão, fica provado o seguinte TEOREMA:

$$(6) \quad \forall\, \delta > 0,\ \exists\, \varepsilon > 0:\ g \in V_\varepsilon(f) \underset{g}{\Rightarrow} \left| \int_a^b f - \int_a^b g \right| < \delta$$

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que uma sucessão φ_n de funções *converge uniformemente para* f *em* $[a,b]$, sse, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um p tal que todas as funções φ_n para $n > p$ são aproximadas de f a menos de ε em $[a,b]$.

---

(1) Simbolicamente, $V_\varepsilon(f) = \{\varphi:\ |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \ ,\quad \forall x \in [a,b]\}$

Do teorema (6) resulta imediatamente o seguinte

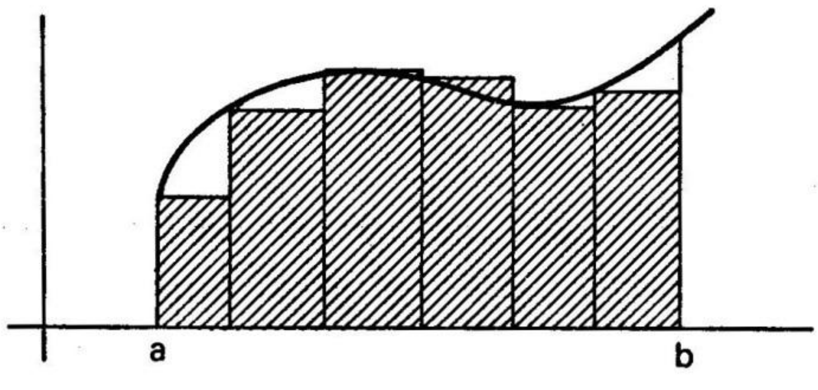
COROLÁRIO. *Se uma sucessão* φ_n *de funções converge uniformemente para* f *em* $[a,b]$, *então*

$$\int_a^b \varphi_n \to \int_a^b f$$

(supondo as funções f e φ_n integráveis em $[a,b]$).

18. **Métodos de integração numérica*.** Passemos, agora, em revista alguns métodos directos de integração numérica:

1) *Método dos rectângulos.* O caso mais simples das funções integráveis é o das funções constantes. Se $\varphi(x) = k$ em $[a,b]$, tem-se, evidentemente, $\int_a^b \varphi = k(b-a)$.



Seguidamente, aparecem-nos as *funções em escada*. Diz-se que φ é uma *função em escada* em $[a,b]$, quando este intervalo se decompõe num número finito de intervalos disjuntos, em que φ é constante. Neste caso φ é integrável em $[a,b]$. Se forem $[x_0,x_1[$,

$[x_1, x_2[, \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, com $x_o = a$ e $x_n = b$, os intervalos em que φ é constante, tem-se:

$$\int_a^b \varphi = \sum_{p=0}^{n-1} y_p(x_{p+1} - x_p) \quad , \text{ onde } y_p = \varphi(x_p)$$

Ora, segundo a própria definição de integral, torna-se evidente que o *integral de uma função* f *em* $[a,b]$ *pode ser sempre calculado como limite de integrais de funções em escada,* φ, *tendo-se neste caso* $y_p = \varphi(x_p) = f(x_p)$, *para* $p = 0, 1, \ldots, n-1$ (1).

No caso em que $f(x) > 0$ em $[a,b]$, cada termo $y_p \Delta x_p$ que intervém no integral da função em escada dá a área do rectângulo de base Δx_p e altura y_p. Daí a designação 'MÉTODO DOS RECTANGULOS' atribuída a este método.

Quando a função f é *monótona no intervalo* $[a,b]$, torna-se aconselhável uma ligeira modificação, que aumenta consideravelmente a convergência do processo: em vez de tomar os valores de f nos extremos inferiores dos intervalos parciais, devem-se *tomar os valores de* f *nos pontos médios desses intervalos* (nos casos usuais $[a,b]$ decompõe-se num número finito de intervalos em que f é monótona).

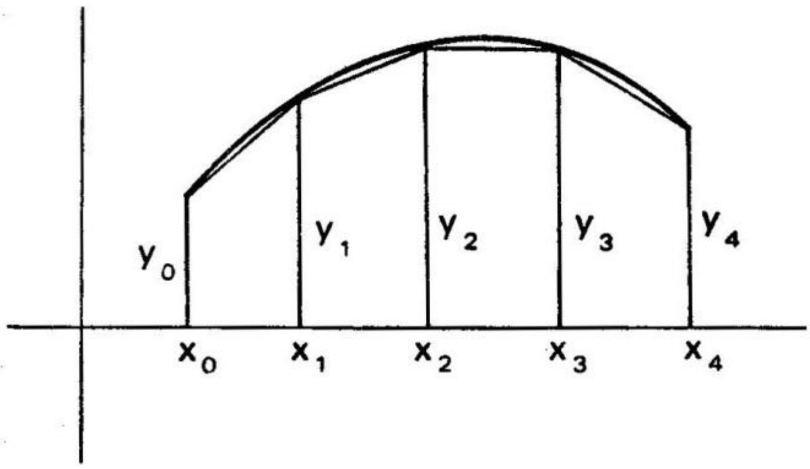
Mesmo assim, o método dos rectângulos é demasiado moroso, como se viu no n.º 7. Interessa, pois, substituí-lo por métodos mais expeditos.

Uma primeira ideia que surge agora, naturalmente, é a de recorrer aos *métodos de interpolação por diferenças finitas, considerando o intervalo* $[a,b]$ *dividido em intervalos de comprimento* Δx_p todos iguais.

---

(1) Se a função f é contínua em $[a,b]$, prova-se que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma função em escada φ tal que $\varphi \in V_\varepsilon(f)$, isto é, tal que $|\varphi(x) - f(x)| < \delta$, $\forall x \in [a,b]$. Aliás, no fundo, é a partir deste facto que se demonstra que toda a função contínua em $[a,b]$ é integrável neste intervalo.

2) *Método dos trapézios.* Este método corresponde a fazer interpolações por primeiras diferenças em cada um dos intervalos parciais. Então f é substituída nesses intervalos por funções lineares, cujos gráficos são as *cordas* correspondentes do gráfico de f.



Em particular, se $f(x) \geqslant 0$ em $[a,b]$, isto corresponde a substituir os rectângulos do método anterior por *trapézios* (donde o nome 'MÉTODO DOS TRAPÉZIOS' dado a este processo). Então, pondo $y_p = f(x_p)$, o integral de f em $[a,b]$ é dado como limite da seguinte sucessão de somas:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

A majoração do erro pode ser feita por meio da fórmula

$$|S_n - \int_a^b f| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2!3!\,n^2} M$$

onde M é um majorante finito de $|f''|$ em $[a,b]$, supondo que f'' existe e é limitada neste intervalo ([1]).

3) *Método de Simpson.* Neste método, o intervalo $[a,b]$ é dividido num número par, 2n, de intervalos iguais e a função f é substituída, em cada intervalo $[x_p, x_{p+2}]$, com $p = 0, 2, 4, \ldots, \ldots, 2n-2$, pela função polinomial de grau $n \leqslant 2$:

$$y = y_p + (x-x_p)\frac{\Delta y_p}{h} + (x-x_p)(x-x_p-h)\frac{\Delta^2 y_p}{2h^2}$$

onde $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $\Delta y_p = y_{p+1} - y_p$, $\Delta^2 y_p = y_{p+2} - 2y_{p+1} + y_p$. Um cálculo simples mostra que o integral desta função em $[x_p, x_{p+2}]$ é:

$$A_p = \frac{h}{3}(y_p + 4y_{p+1} + y_{p+2})$$

Então um valor aproximado de $\int_a^b f$ será $S_n = A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-2}$ ou seja:

$$S_n = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4\ (y_1 + \ldots + y_{2n-1})]$$

Esta é a FÓRMULA DE SIMPSON. Prova-se que a *majoração do erro,* neste caso, pode ser feita por meio da fórmula

$$|\ S_n - \int_a^b f\ | \leqslant \frac{(b-a)^5}{4!5!\,n^4}\ M,$$

([1]) Nos intervalos em que f'' tem sinal constante, pode fazer-se outro tipo de majoração, recorrendo às *tangentes* nos pontos de abcissas $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

onde M é um majorante de $|f^{(4)}|$ em $[a,b]$, supondo que f admite 4.ª derivada, limitada em $[a,b]$. Comparando-a com a anterior, para o método dos trapézios, vê-se que este método *converge muito mais rapidamente,* visto que no denominador figura n^4 em vez de n^2.

19. **Fórmula de Taylor*.** Entre os métodos de integração numérica mais usados figuram os *métodos de integração por séries.* Para dar exemplos destes convém previamente deduzir a chamada 'fórmula de Taylor'.

Seja J um intervalo qualquer da recta e *a* um ponto arbitrário de J. Sendo φ uma função contínua em J, convencionemos escrever:

$$\mathcal{J}\varphi(x) = \int_a^x \varphi(u)du \quad , \quad \forall x \in J$$

Assim, segundo o TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL, $\mathcal{J}$ é o operador que *transforma* φ *na primitiva de* φ *que é nula em* a (visto que o integral se anula para $x = a$). Em particular, se φ se reduz a uma constante k em J, tem-se:

$$\mathcal{J}k = k(x-a) \quad , \quad \mathcal{J}^2 k = k\,\frac{(x-a)^2}{2} \quad , \quad \mathcal{J}^3 k\,\frac{(x-a)^3}{2\times 3} \quad , \quad \ldots$$

Dum modo geral:

(1) $$\mathcal{J}^n k = k\,\frac{(x-a)^n}{n!} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Seja, agora, f *uma função que admite derivada de ordem* n *contínua em* J. Esta pode representar-se por $f^{(n)}$ ou por $D^n f$. Como $f^{(n)} = Df^{(n-1)}$, $f^{(n-1)}$ é uma primitiva de $f^{(n)}$ e, portanto:

$$\mathcal{J} f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

Por sua vez, e atendendo a (1), resulta daqui:

$$\mathcal{J}^2 f^{(n)}(x) = f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - f^{(n-1)}(a)(x-a)$$

$$\mathcal{J}^3 f^{(n)}(x) = f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - f^{(n-2)}(a)(x-a) - \\ - f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!}$$

e assim sucessivamente. Conclui-se por este processo que:

$$\mathcal{J}^n f^{(n)}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} - f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} - \ldots \\ \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

Daqui, se pusermos

$$\mathcal{J}^n f^{(n)}(x) = R_n(x),$$

virá:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \\ + R_n(x)$$

Esta é a importante FÓRMULA DE TAYLOR, que se pode escrever abreviadamente:

$$(2) \quad f(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + R_n(x) \quad , \quad \forall x \in J$$

considerando $f^{(0)} = D^0 f = f$.

O termo $R_n(x)$ é chamado o *resto da fórmula de Taylor para* f *no ponto* a. São conhecidas várias expressões para este termo, como por exemplo a seguinte:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \quad , \quad \forall x \in J$$

Esta expressão, que indicamos a título de curiosidade, pode ser deduzida por meio de sucessivas primitivações por partes, a partir de $f^{(n)}$.

O que nos interessa agora, propriamente, é uma fórmula de majoração para $R_n(x)$:

Seja M_n um majorante de $|f^{(n)}(x)|$ em J, isto é:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n \quad , \quad \forall x \in J.$$

Então virá, supondo $x > a$ [cf. n.º 17, (1) e (3)]:

$$|\mathcal{J} f^{(n)}(x)| = |\int_a^x f^{(n)}(u)\,du| \leqslant (x-a) M_n$$

$$|\mathcal{J}^2 f^{(n)}(x)| \leqslant \int_a^x (u-a) M_n du = \frac{(x-a)^2}{2} M_n$$

$$|\mathcal{J}^3 f^{(x)}(x)| \leqslant \int_a^x \frac{(u-a)^2}{2} M_n du = \frac{(x-a)^3}{2 \times 3} M_n$$

e assim sucessivamente até $\mathcal{J}^n$:

$$|\mathcal{J}^n f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} M_n$$

Pusemos agora $x-a$ entre sinais de módulo, porque, como é fácil ver, a fórmula também é válida assim para $x \leqslant a$. Será, pois, esta uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO RESTO.

20. **Série de Taylor*.** Suponhamos que f admite derivadas contínuas de todas as ordens em J. A fórmula de Taylor pode então escrever-se, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x) \quad , \quad \forall x \in J$$

Suponhamos, além disso, que o resto tende para zero em J *quando* $n \to 0$, *isto é, que*

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in J$$

O mesmo acontece, é claro, com R_{n+1}. Passemos, agora, ao limite em (1) quando $n \to \infty$. Como x se mantém fixo (isto é, *não depende de* n), o primeiro membro de (1) é constante e, portanto, virá:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \quad , \quad \forall x \in J$$

Esta fórmula escreve-se mais simplesmente como segue:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \quad , \quad \forall x \in J,$$

ou ainda, desenvolvendo

$$(3) \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

Como se vê, enquanto a fórmula de Taylor tem um número finito de termos, esta tem um *número infinito de termos:* o 2.º membro é uma série (cf. Cap. I, n.º 32), chamada precisamente a *série de Taylor de* f *relativa ao ponto* a. Em conclusão:

TEOREMA 1. *A função* f *é representável pela série de Taylor* (3) *no intervalo* J, *sse a condição* (2) *se verifica.*

Vamos, agora, ver o seguinte

TEOREMA 2. *Uma condição suficiente para que se verifique* (2) *é que todas as derivadas* $f^{(n)}$ *admitam um mesmo majorante finito em* J, *isto é, que exista um número* M *tal que:*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad , \quad \forall x \in J, \; n \in \mathbb{N}$$

Com efeito, se esta condição se verifica, tem-se:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} M \quad , \quad \forall x \in J, \; n \in \mathbb{N}$$

Ora, quando $n \to \infty$, o primeiro factor do 2.º membro tende para zero (cf. Cap. I, n.º 31, exercício V) e, como M é constante, vem $\lim_{n \to 0} R_n(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in J.$

21. **Desenvolvimentos em série de potências*.** Quando $a = 0$, a fórmula de Taylor e a série de Taylor simplificam-se:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)} f^{(n-1)}(0) + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots,$$

passando a chamar-se *fórmula de Mac-Laurin* e *série de Mac-Laurin*, respectivamente. Vamos, agora, aplicar os resultados anteriores a algumas funções usuais:

1) Seja $f(x) \equiv e^x$ e $J = [-\alpha, \alpha]$, sendo α *qualquer* número positivo. Então já sabemos que

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad , \quad \forall x \in J \quad , \quad n \in \mathbb{N},$$

e, como e^x é *crescente* em J, tem-se $e^x \leqslant e^\alpha$ ou seja:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant e^\alpha \quad , \quad \forall x \in J \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Portanto, segundo os teoremas 1 e 2 do número anterior, esta função é representável pela sua série de Mac-Laurin em J. Ora $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

para todo o $x \in [-\alpha, \alpha]$. E, como α é um número positivo qualquer, segue-se que *esta fórmula é válida para todo o* $x \in \mathbb{R}$. Em particular, obtém-se *uma expressão para o número* e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

2) Seja $f(x) \equiv \cos x$ e $J = [-\alpha, \alpha]$, com α positivo qualquer. Então:

$$f'(x) \equiv -\operatorname{sen} x \equiv \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f''(x) \equiv -\cos x \equiv \cos(x + \pi),$$

$$f'''(x) \equiv \operatorname{sen} x \equiv \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) \quad , \quad f^{IV}(x) \equiv \cos x \equiv \cos(x + 2\pi)$$

Dum modo geral:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in J \quad , \quad n \in \mathbb{N},$$

donde:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant 1 \quad , \quad \forall x \in J \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

A função $\cos x$ é, pois, representável pela sua série de Mac-

-Laurin em $[-\alpha, \alpha]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e portanto em $\mathbb{R}$. Agora $f(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0, \dots$ Portanto:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) De modo análogo se vê que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

EXEMPLO NUMÉRICO. *Calcular* sen 36° *com* 7 *algarismos exactos*. É preciso primeiro passar de graus a radianos:

$$36° = \pi/5 \text{ rad} \approx 0{,}62831853 \text{ rad}$$

Calculando sucessivamente as somas	0,62831853
parciais S_n da série dos senos, para	0,58697683
$x = 0{,}62831853$ e $n = 1, 2, \dots$, por meio	0,58779288
do computador do L. N. E. C., obtive-	0,58778521
ram-se os resultados indicados à margem.	0,58778525

Os algarismos estabilizaram-se até à 7.ª ordem decimal a partir da 4.ª soma e podem considerar-se exactos, porquanto o termo seguinte da série é bastante menor que 10^{-7} e os *erros de arredondamento* afectam só o último algarismo, visto o número de termos ser inferior a 6. Tem-se, pois, *com 7 algarismos exactos:*

$$\text{sen } 36^\circ = 0{,}5877852$$

Note-se que os valores são alternadamente superiores e inferiores ao limite, como era de esperar.

22. **Integração de séries termo a termo*.** Comecemos por um exemplo simples. Sabemos que se tem [1]:

$$(1) \qquad \frac{1}{1-r} = 1 + r + \cdots + r^{n-1} + \frac{r^n}{1-r} \quad , \quad \forall r \neq 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Seja, agora, x um ponto qualquer de $]-1, 1[$. Integrando ambos os membros de (1) *em ordem a* r, *entre* 0 *e* x, vem:

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{1}{1-r}\,dr = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{r^n}{1-r}\,dr$$

Ora tem-se, por um lado:

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{dr}{1-r} = -\log(1-x)$$

---

(1) Basta multiplicar ambos os membros por $1-x$ para reconhecer que a fórmula é válida.

Por outro lado, como

$$\left|\frac{r^n}{1-r}\right| \leqslant \frac{|x^n|}{1-r} \quad , \quad \text{para} \quad |r| < |x|,$$

vem (cf. n.º 16):

$$\left|\int_0^x \frac{r^n}{1-r}\,dr\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{|x|^n}{1-r}\,dr\right| = |x|^n \,|\log(1-x)|$$

Isto mostra que o último termo de (2) tende para 0 quando $n \to \infty$. Logo, atendendo a (3), virá de (2), por passagem ao limite quando $n \to \infty$:

$$(4) \qquad -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

donde, mudando x em $-x$ e multiplicando por -1:

$$(5) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

Assim, como se vê, o desenvolvimento de log $(1+x)$ em série de Mac-Laurin pode obter-se, integrando *termo a termo* a série correspondente de $(1+x)^{-1}$.

Mas a convergência da série (5) é *demasiado lenta*. Somando (5) e (4) membro a membro, obtém-se o seguinte desenvolvimento, que se *aplica, na prática, ao cálculo numérico de logaritmos:*

$$(6) \quad \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$$

Vejamos um *segundo exemplo*. Substituindo r por $-t^2$ em (1), vem:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}$$

Discorrendo como no caso anterior, vê-se que esta série pode ser integrada *termo a termo* entre 0 e x, para todo o $x \in]-1,1[$ e que, portanto:

$$(7) \quad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Em particular, para $x = 1$, deduz-se daqui:

$$(8) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

Poderíamos tentar utilizar esta série para o cálculo numérico de π. Mas a convergência é *extremamente lenta:* para obtermos π a menos de 0,0001, teríamos de somar mais de 1000 termos da série! No entanto, MACHIN notou que, se pusermos

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} \quad , \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} \quad ,$$

se tem, como é fácil verificar, calculando a tangente dos dois membros (é um exercício simples):

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$

Daqui e de (7) deduz-se:

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \frac{1}{7 \times 5^7} + \cdots\right) -$$

$$- 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \cdots\right)$$

Esta fórmula já permite um cálculo rápido de π. Tem-se, por exemplo:

$$16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5}\right) - \frac{1}{239} = 3{,}1415 \cdots$$

Vejamos, agora, um *terceiro exemplo*. Do desenvolvimento de e^x em série de Mac-Laurin, deduz-se, para todo o $x \neq 0$:

$$\text{(7)} \qquad \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$$

Utilizando a majoração do termo do resto, pode ver-se, como nos casos anteriores, que esta série, excluído o primeiro termo, *é integrável termo a termo em qualquer intervalo limitado*. Daqui se conclui que uma primitiva de e^x/x será dada pela fórmula:

$$P\,\frac{e^x}{x} = C + \log|x| + x + \frac{x^2}{2 \times 2} + \cdots + \frac{x^n}{n \times n!} + \cdots$$

em que C é uma *constante arbitrária*. Em particular, quando o valor de C é a chamada *'constante de Euler'*, esta primitiva (definida para todo o $x \neq 0$) será precisamente a função Ei(x) (*exponencial integral de* x).

Dum modo geral:

DEFINIÇÃO. Diz-se que uma série de funções

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

é *uniformemente convergente num intervalo* $[a,b]$, sse a soma $\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x)$ converge uniformemente para uma função $f(x)$ em $[a,b]$.

Por outro lado, do corolário do teorema do n.º 17 deduz-se o seguinte

TEOREMA. *Se uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ *é uniformemente convergente num intervalo* $[a,b]$, *definindo aí uma função* $f(x)$, *então a série pode ser integrada termo a termo em* $[a,b]$, *isto é, tem-se:*

$$\int_a^b f = \int_a^b \varphi_0 + \int_a^b \varphi_1 + \cdots + \int_a^b \varphi_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b b\, \varphi_n$$

Este teorema é de grande utilidade na prática e podia ter sido utilizado para justificar as anteriores integrações termo a termo. Um outro exemplo, entre inúmeros que podem ser citados, é-nos fornecido pelos integrais elípticos (cf. n.º 14). O cálculo numérico destes é efectuado, habitualmente, desenvolvendo as funções

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)^{1/2} \quad , \quad (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)^{-1/2},$$

em *séries binomiais de potências de* $\operatorname{sen}^2 t$ e integrando depois essas séries termo a termo entre 0 e θ, para cada $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, pois prova-se que tais séries são uniformemente convergentes neste intervalo, se $|k| < 1$.

EXEMPLO NUMÉRICO. *Calcular* $\int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx$ *com* 6 *algarismos exactos, a partir da série* (7), *atrás obtida para* e^x/x.

Prova-se que esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado a que não pertença a origem. Podemos, pois, integrá-la termo a termo no intervalo $[1, 5]$, o que dá:

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx = \log x \Big|_1^5 + x \Big|_1^5 + \frac{x^2}{4}\Big|_1^5 + \frac{x^3}{3.3!}\Big|_1^5 + \cdots + \frac{x^n}{n.n!}\Big|_1^5 + \cdots$$

Ora, tem-se:

$$\log x \Big|_1^5 = \log 5 - \log 1 = 1{,}6094379 \quad , \quad x\Big|_1^5 = 5 - 1 = 4 \quad , \quad \frac{x^2}{4}\Big|_1^5 = 6, \cdots$$

Calculando e somando sucessivamente os dois primeiros termos, os três primeiros, etc., o computador do L.N.E.C. forneceu os seguintes valores aproximados de integral:

5,6094379;	11,609438;	18,498327;	24,998327;
30,204994;	33,821660;	36,036059;	37,247896;
38,114217;	38,225422;	38,267896;	38,282975;
38,287976;	38,289532;	38,289988;	38,290114;
38,290147;	38,290155.		

Podem considerar-se estabilizados os 6 primeiros algarismos.

Além disso, como o número de parcelas para obter o último é 18, os erros de arredondamento produzem na soma um erro *não superior a* $18 \times 10^{-6} < 0{,}00002$. Tem-se, pois, até à ordem decimal indicada:

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x}\,dx = 38{,}2901$$

NOTAS IMPORTANTES

I. O cálculo do exemplo anterior foi executado pela máquina em breves segundos, e muito mais rápido teria sido, se o programa tivesse pedido apenas o último valor aproximado. Esta brevidade contrasta singularmente com o quarto de hora despendido no cálculo numérico directo, como se indicou no n.º 7, o que não admira, *visto que, nesse caso, foi necessário calcular, por meio da série* (7), *o valor de* e^x/x *em* 2520 *pontos.*

II. O computador permite calcular facilmente o referido integral, pelo método anterior, com a aproximação que se queira. Com efeito, o resto da série, depois dos 19 primeiros termos é, como se viu, inferior a 10^{-4}, o que permite fazer o seu cálculo, de modo análogo, com cerca de 6 algarismos exactos, e assim sucessivamente.

III. Como se vê, o método de integração, por séries, *pode ser* extremamente vantajoso na prática. *Mas nem sempre é aplicável,* ou porque a função integranda não é desenvolvível em série de funções simples, uniformemente convergente no intervalo considerado, ou porque tal desenvolvimento existe, mas é complicado ou converge muito lentamente. Nestes casos, é inevitável recorrer a integrações numéricas por decomposição do intervalo, que podem no entanto ser associadas, em certos casos, à utilização de alguns termos iniciais de desenvolvimentos em série.

23. **Exemplos de equações diferenciais*.** Quase todos os problemas de análise infinitesimal relativos às ciências da natureza se traduzem sob a forma de *equações diferenciais*. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO I. *Achar uma função que coincida com a sua derivada.* Considerando a função sob a forma $y = f(x)$, o problema traduz-se pela *equação diferencial:*

$$(1) \quad y' = y; \quad \text{mais explicitamente:} \quad f'(x) \equiv f(x).$$

O leitor já conhece uma solução desta equação: a função $y = e^x$. Mas há *outras soluções:* qualquer função da forma $y = Ce^x$ é também solução da equação (1), como se pode verificar. Pergunta-se, agora: Estão aqui *todas* as soluções de (1)? Vamos ver que sim. Tem-se, com efeito[1]:

$$f'(x) \equiv f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \equiv 1 \Leftrightarrow D_x \log|f(x)| \equiv 1$$

Ora, já sabemos (n.º 1) que todas as soluções desta última são da forma

$$\log|f(x)| \equiv x + c \qquad \text{(c, constante arbitrária),}$$

o que equivale a escrever:

$$f(x) \equiv Ce^x \quad , \quad \text{pondo} \quad C = \pm e^c$$

Mais geralmente, se considerarmos uma equação

$$y' = ky \quad , \quad \text{sendo k uma constante} \neq 0,$$

vê-se que a *solução geral* (também chamada *integral geral*) da equação é dada pela expressão

$$y = Ce^{kx} \qquad \text{(k, constante arbitrária)}$$

(1) Excluindo a solução nula.

O problema assim posto é, como se vê, *indeterminado:* tem uma infinidade de soluções. Para obter um problema *determinado* (isto é, com uma única solução), é preciso juntar-lhe uma outra condição, que pode ser, por exemplo, o valor da função incógnita para $x = 0$:

$$f(0) = y_o \qquad \text{(chamada '\textit{condição inicial}')}$$

Neste caso, tem-se, como é fácil ver:

$$f(x) \equiv y_o\, e^{kx}$$

No n.º 4, estudámos dois exemplos concretos que conduzem a equações diferenciais deste tipo: *desintegração radioactiva* e *crescimento populacional.*

EXEMPLO 2. Achar uma função $y = f(x)$ tal que

$$(2) \qquad y'' = -y$$

Pensando um momento, o leitor encontra logo duas soluções desta equação: as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Depois, atendendo aos teoremas sobre derivadas, verá que são soluções de (2) todas as funções da forma:

$$(3) \qquad y = A \operatorname{sen} x + B \cos x,$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Ora, demonstra-se que estão aqui *todas* as soluções de (2), isto é: a fórmula (3) dá-nos a ***solução geral*** (ou o *integral geral*) da equação diferencial (2).

Mais geralmente, dada uma equação do tipo

$$(4) \qquad y'' = -h^2 y \qquad \text{(h, constante não nula),}$$

prova-se que o seu *integral geral* é:

$$(5) \qquad y = A \operatorname{sen} hx + B \cos hx$$

Neste caso, para tornar o problema determinado, é necessário dar, por exemplo, os valores da função incógnita *e da sua derivada* no ponto 0:

$$f(0) = y_0 \quad , \quad f'(0) = y'_0 \quad \textit{(condições iniciais)}$$

e é fácil deduzir de (5) que $y_0 = B \quad , \quad y'_0 = hA$, donde:

$$(6) \qquad y = y_0 \cos hx + \frac{y'_0}{h} \operatorname{sen} hx$$

Um problema concreto que se traduz por uma equação do tipo (4) é o das *vibrações simples:*

Determinar a equação do movimento de um ponto material P, *que se desloca sem atrito sobre uma recta, atraído para um ponto fixo* 0 *dessa recta, por uma força proporcional à distância de* P *a* 0(1).

Suponhamos a recta orientada e seja *s* a abcissa de P em cada instante t, tomando 0 para origem. *O que se pretende é determinar* s *em função de* t, *isto é, achar a equação dos espaços,* $s = f(t)$. Designando por *m* a massa do ponto material e por k a constante de proporcionalidade, o problema traduz-se pela equação diferencial:

$$ms'' = -ks \quad (\text{supondo } k > 0)$$

(1) É este, *aproximadamente*, o caso da ponta da lâmina, considerado no Cap. I, n.º 37, ou o caso de um *diapasão*, ou ainda o de um *pêndulo simples*, quando o ângulo de afastamento é pequeno.

Com efeito, s'' [ou seja f''(t)] é a aceleração em cada instante t e portanto ms'' é a força que solicita P, força esta proporcional a |s|, mas de sinal contrário ao de s, por ser *atractiva*. É claro que

$$m\,s'' = -\,ks \Leftrightarrow s'' = -\,\frac{k}{m}\,s,$$

donde, por comparação com (3) e (6), pondo $\sqrt{k/m} = \omega$:

$$s = s_0 \cos t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega\,t$$

Esta é a equação do *movimento vibratório simples*, em que s_0 é o *espaço inicial* e v_0 a *velocidade inicial*.

Suponhamos agora que, à força atractiva, se opõe a resistência do ar, sendo esta proporcional à velocidade s' e sendo k o coeficiente de proporcionalidade. Neste caso, o problema é traduzido pela equação diferencial

$$ms'' = hs' - ks \qquad (h > 0, \quad k > 0)$$

Prova-se que a solução geral desta é:

$$s = e^{-\lambda t}(A\,\text{sen}\,\omega\,t + B\cos\omega\,t),$$

em que $\lambda = h/m$, $\omega = \sqrt{k/m - \lambda^2}$, e A e B são constantes arbitrárias que podem ser determinadas a partir de s_0 e v_0.

Trata-se, agora, do *movimento vibratório harmónico amortecido* (cf. Cap. I, n.º 37).

Consideremos finalmente o caso em que, à força elástica atractiva, se adiciona uma *força periódica* f *que excita a vibração*. Seja por exemplo $f = q$ sen ω_1 t, com q e ω_1 constantes. Para maior simplicidade vamos supor m = 1 e h = 0 (no caso geral as conclusões são análogas). Então, a equação diferencial de movimento pode escrever-se:

$$s'' = -ks + q \operatorname{sen} \omega_1 t$$

Se pusermos agora $\sqrt{k} = \omega$, é fácil verificar que uma *solução particular da* equação será:

$$s = p \operatorname{sen} \omega_1 t,$$

em que

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad \text{(amplitude da vibração)}$$

Como se vê, *quando a pulsação* ω_1 *se aproxima de* ω, *a amplitude* p *tende para* ∞ (fenómeno chamado '*ressonância*').

A *solução geral* (ou *integral geral*) da equação é, neste caso:

$$s = p \operatorname{sen} \omega_1 t + A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t,$$

sendo A e B constantes arbitrárias.

24. **Integração numérica de equações diferenciais*.** Como vimos pelos exemplos anteriores, as soluções das equações diferenciais são *funções* e não *números*. Por exemplo, na equação $f''(x) \equiv -f(x)$, a variável numérica x é uma variável aparente, visto que a igualdade deve ser verificada *qualquer que seja* x. Trata-se, pois, de uma *condição na variável* f (variável *funcional*). Esta condição pode escrever-se mais simplesmente $f'' = -f$, ou ainda $y'' = -y$,

com $y = f(x)$; mas esta última forma da equação, embora usual e cómoda, é na realidade um abuso de escrita, em que se confunde *função* com *variável dependente*.

Dum modo geral, chamam-se *equações funcionais* as equações (isto é, as *igualdades condicionais*), cujas soluções devem ser funções. Por sua vez, chamam-se *equações diferenciais* as equações funcionais, em que a função incógnita aparece relacionada com a sua derivada ou com as suas derivadas, até certa ordem, por meio de expressões analíticas que incidem sobre os valores dessas funções e ainda, eventualmente, sobre os valores da variável independente. A mais elevada ordem das derivadas que figuram na equação chama-se a *ordem da equação diferencial*. Por exemplo, a equação diferencial $y' + y = 0$ é de 1.ª ordem, enquanto a equação diferencial $y'' - y' = (1 - x^2)y$ é de 2.ª ordem.

Apresentam-se também, na prática, *sistemas de equações diferenciais*. São exemplos típicos de tais sistemas os que descrevem o movimento de um ponto no espaço; neste caso, as incógnitas são as coordenadas x, y, z do ponto, num dado referencial, *consideradas como funções do tempo* t.

Temos estado até aqui a subentender que as funções incógnitas são funções reais de *uma* variável real. Mas podem ainda apresentar-se equações diferenciais em que a incógnita é uma função de *duas ou mais* variváveis reais e, como, neste caso, intervêm, na equação *derivadas parciais* (cf. n.º 42) a equação diferencial chama-se *equação em derivadas parciais,* enquanto as primeiras se chamam *equações diferenciais ordinárias*. São exemplos muito importantes de equações em derivadas parciais: a *equação das ondas* (sonoras, electromagnéticas, etc.), a *equação da difusão* (do calor, de substâncias dissolvidas, etc.), a *equação de Laplace* (relativa a potenciais eléctricos, etc.) e muitas outras.

É claro que o *problema da primitivação* corresponde já a resolver uma equação diferencial do tipo $y' = f(x)$, em que f é a função dada. É, portanto, de esperar que, na resolução das equações diferenciais, surjam dificuldades semelhantes às que verificámos a propósito da primitivação: em geral não é possível resolver uma equação diferencial por métodos elementares, que conduzam a expressões analíticas conhecidas; torna-se, então, necessário recorrer a *métodos de resolução* (ou *integração*) *numérica*.

Para dar uma ideia destes métodos, limitar-nos-emos ao caso simples de uma equação da forma:

$$(1) \qquad y' = f(x,y),$$

em que $f(x,y)$ é uma função *dada*, de duas variáveis. O que se pretende é achar uma função $y = \varphi(x)$ que verifique (1), isto é, que transforme (1) numa *identidade*:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

O problema, quando possível, é geralmente *indeterminado*. Mas, na prática, junta-se normalmente a (1) uma *condição inicial*, isto é, dá-se o valor da função incógnita num ponto x_o:

$$(2) \qquad \varphi(x_o) = y_o \quad , \quad \text{supondo} \quad (x_o, y_o) \in D_f$$

Ora, a equação (1) pode escrever-se sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

que nos conduz a considerar a *igualdade aproximada*

$$(3) \qquad \Delta y \approx f(x,y)\, \Delta x$$

em que *os diferenciais foram substituídos pelas diferenças finitas.*

Consideremos, então, um intervalo $[x_o,x]$, com x variável, e uma sequência de pontos

$$x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x,$$

tais que $\Delta x_p = x_{p+1} - x_p = h$, para $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Supondo que *existe uma e uma só solução* $y = \varphi(x)$ de (1) que verifique (8) e pondo $y_p = \varphi(x_p)$, para $p = 1, 2, \ldots, n-1$, virá então de (3):

$$y_1 - y_o \approx f(x_o,y_o)h \quad , \quad \text{donde} \quad y_1 \approx y_o + f(x_o,y_o)h$$

Por sua vez:

$$y_2 - y_1 \approx f(x_1,y_1)h \quad , \quad \text{donde} \quad y_2 \approx y_1 + f(x_1,y_1)h$$

e assim sucessivamente, até $y_n \approx y = \varphi(x)$, supondo que os pontos (x_p,y_p) pertencem todos a D_f, para $p = 1, 2, \ldots, n-1$.

A intuição diz-nos que se obtêm assim *valores aproximados de* $\varphi(x)$ *com um grau de aproximação tanto maior quanto menor for* h. E esta intuição é confirmada pela lógica, quando a função f(x,y) verifica certas condições que, normalmente, são satisfeitas na prática.

O método de integração numérica que acabamos de expor é o mais elementar, entre os chamados '*métodos de integração passo a passo*'. Este, que corresponde ao *método dos rectângulos* no caso da primitivação de funções (quando f(x,y) se reduz a uma função só de x), é na prática demasiado moroso, devendo então ser substituído por outros *métodos de integração passo a passo* mais expeditos. Em certos casos, são aplicáveis *métodos de integração por meio de séries* e, noutros ainda, *métodos mistos,* em que se faz uso ao mesmo tempo de séries e de integrações passo a passo, aplicando *fórmulas de interpolação.*

Seja como for, a integração numérica de equações diferenciais é geralmente um problema que exige técnicas muito delicadas de cálculo numérico, que podem variar de caso para caso, conduzindo com frequência a cálculos laboriosíssimos, que seriam impraticáveis antes da era dos computadores electrónicos. Cálculos deste tipo são, por exemplo, os que se referem a voos espaciais e a mísseis teleguiados.

Quando não se exige uma grande aproximação, são muito úteis os computadores electrónicos *analógicos*, que resolvem rapidamente equações de tipos mais ou menos complicados, fornecendo as soluções com aproximação que pode ir até 0,05 %, e ainda gráficos das soluções. Pode resolver-se por este meio, por exemplo, a importante *equação de Van der Pol:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

para diferentes valores do parâmetro λ, uma vez conhecidos os valores de x e x' para $t = 0$ (condições iniciais). *Tais computadores são de grande utilidade, sobretudo em questões de engenharia.*

Tornando aos métodos de integração numérica, importa notar que, no que se refere a *equações em derivadas parciais,* se conhece ainda muito pouco sobre critérios matemáticos relativos à *convergência dos processos* e à *validade dos resultados como soluções,* o que obriga, por vezes, à construção de *modelos para verificação experimental dos resultados* (cf. Cap. I, n.º 43, pp. 163-164).

Encontra-se pois, aqui, um imenso campo aberto aos jovens, que estejam interessados em investigação matemática ligada a aplicações concretas.

OBSERVAÇÃO FINAL. Este capítulo, tal como o anterior, foi muito mais longe do que se pode exigir, entre nós, num programa liceal. O objectivo foi o de apresentar um panorama tanto quanto possível largo e actualizado da análise infinitesimal, tendo em vista fornecer ao leitor mais interessado ou mais necessitado (estão neste caso os alunos que irão frequentar cadeiras de Matemáticas Gerais e de Física em Escolas Superiores) uma preparação complementar, que o ajude a vencer, *pelos seus próprios meios,* as dificuldades que terá de enfrentar.

CAPÍTULO III

TEORIA DEDUTIVA DOS NÚMEROS NATURAIS (¹)

1. **Caracterização da estrutura do grupóide** ($\mathbb{N}$, +). Como vimos no capítulo III, do 1.º volume, os números naturais apresentam-se espontâneamente ao nosso espírito como *cardinais de conjuntos finitos não vazios*. Por exemplo:

$$1 = \# \{\text{Lisboa}\} = \# \{\text{Liceu Camões}\} = \cdots$$

$$2 = \# \{\text{Terra, Lua}\} = \# \{\text{Magnésio, Brasil}\} = \cdots$$

$$3 = \# \{\text{dó, ré, mi}\} = \# \{1, \pi, \text{Hidrogénio}\} = \cdots$$

e assim por diante. Nesta ordem de ideias, a operação lógica de *reunião*, entre conjuntos disjuntos, dá lugar à *adição* de números naturais. Por exemplo, a fórmula em termos de conjuntos:

$$\{\text{Terra, Lua}\} \cup \{\text{dó, ré, mi}\} = \{\text{Terra, Lua, dó, ré, mi}\}$$

(¹) **Este capítulo já não está incluído no projecto da O.C.D.E. (ver o *Guia*).**

dá lugar à fórmula em termos de números:

$$2 + 3 = 5$$

E, assim como a ideia de número natural é *mais abstracta* que a de conjunto finito, assim também a ideia de adição entre números é *mais abstracta* que a de reunião entre conjuntos. *Por conseguinte, na passagem do universo dos conjuntos finitos para o universo dos números naturais, há uma subida no nível de abstracção.*

Por outro lado, como vimos, as propriedades da reunião de conjuntos, que inferimos da experiência quotidiana por um processo indutivo-dedutivo mais ou menos consciente, conduzem-nos a propriedades correspondentes da adição entre números naturais, tais como as seguintes:

I. *Para todo o par* (a,b) *de números naturais, existe sempre um e um só número natural* c, *que é soma de* a *com* b, *isto é, tal que* $a + b = c$.

II. $(a+b) + c = a+(b + c) \quad , \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}.$

III. $a + b = b + a \quad , \quad \forall a,b \in \mathbb{N}.$

Nestas propriedades, o ponto mais delicado — e, podemos dizer, *mais discutível* — é a proposição de existência contida em I. Tal proposição equivale à seguinte:

Quaisquer que sejam os conjuntos finitos A *e* B, *existem sempre dois conjuntos disjuntos* A' *e* B' *tais que* $\# A' = \# A$ e $\# B' = \# B$.

Mais tarde discutiremos o conteúdo desta proposição. Por agora interessa apenas lembrar o seguinte:

1.º *A propriedade* I *diz-nos que o par* $(\mathbb{N},+)$ *é um grupóide.*

2.º *A propriedade* II *(junta a* I*) diz-nos que o grupóide* $(\mathbb{N},+)$ *é associativo, portanto um semigrupo.*

3.º *A propriedade* III *(junta a* I *e* II*) diz-nos que o semigrupo* $(\mathbb{N},+)$ *é comutativo.*

Mas há inúmeros semigrupos comutativos (A,θ) *não isomorfos* a $(\mathbb{N},+)$, por exemplo $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{N},\times)$, etc. Por outro lado, há também inúmeros semigrupos comutativos *isomorfos* a $(\mathbb{N},+)$, que têm portanto a mesma *estrutura* deste *(procure exemplos)*. O problema que nos propomos resolver é precisamente o seguinte:

Caracterizar a estrutura de $(\mathbb{N},+)$ *por meio de um sistema, tão simples quanto possível, de propriedades lógicas da adição de números naturais.*

Temos, pois, de procurar outras propriedades da adição em $\mathbb{N}$, independentes de I, II, III (isto é, que não se deduzam destas). Para isso, recordemos que, além da *adição,* é definida em $\mathbb{N}$ a *relação de grandeza*. Esta pode ser definida a partir da *relação de inclusão estrita,* entre conjuntos finitos, do seguinte modo:

$$(1) \qquad \# A < \# B \Leftrightarrow \exists X \colon X \subsetneq B \wedge \# X = \# A$$

Daqui se deduzem as propriedades anti-reflexiva, anti-simétrica, transitiva e tricotómica da relação $<$. Mas vimos também que:

A relação $<$ *pode ser definida em* $\mathbb{N}$ *a partir da operação* $+$, *utilizando a propriedade:*

$$(2) \qquad a < b \Leftrightarrow \exists x \colon a + x = b$$

Adoptemos, pois, esta propriedade como definição da relação $<$ em $\mathbb{N}$. Podemos então traduzir as propriedades anteriores desta relação *em termos de adição*. Por exemplo, a PROPRIEDADE ANTI-REFLEXIVA:

$$a < b \Rightarrow a \neq b$$

pode traduzir-se do seguinte modo:

IV. $$a + x \neq a \quad , \quad \forall a,\ x \in \mathbb{N}.$$

O mais curioso agora é que as propriedades anti-simétrica e transitiva se deduzem das propriedades I-IV *da adição.*

Comecemos por demonstrar a transitividade[1]:

Sejam a, b, c três números naturais tais que $a < b$ e $b < c$. Então existem dois números naturais x, y tais que

$$a + x = b \quad , \quad b + y = c \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde:

$$(a + x) + y = c \qquad \textit{(porquê?)}$$

ou seja:

$$a + (x+y) = c \qquad \textit{(porquê?)}$$

Daqui se conclui que $a < c$ *(porquê?)*. Assim provámos a PROPRIEDADE TRANSITIVA:

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

---

(1) **Demonstração facultativa.**

Demonstremos, agora, a anti-simetria:

Sejam a, b dois números naturais tais que $a < b$. Pretende-se demonstrar que $b \nless a$. Vamos fazê-lo pelo *método da redução ao absurdo*. Suponhamos que $b < a$. Então, como $a < b$ e $b < a$ tem-se $a < a$ *(porquê?)* e portanto $a \neq a$ *(porquê?)*, o que é absurdo *(porquê?)*. Logo tem-se, necessariamente, $b \nless a$ e assim fica provada a PROPRIEDADE ANTI-SIMÉTRICA (ESTRITA):

$$a < b \Rightarrow b \nless a$$

Pelo contrário, a PROPRIEDADE TRICOTÓMICA:

$$\forall a, b, c: a < b \vee b < a \vee a = b$$

é independente das anteriores, isto é, não se pode deduzir destas. Note-se que esta propriedade é equivalente à seguinte:

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

o que permite traduzi-la em termos de adição do seguinte modo:

V. $$a \neq b \Rightarrow \exists x: a + x = b \vee b + x = a$$

Vejamos, agora, se a lista de propriedades I-V *já chega para caracterizar a estrutura de* $(\mathbb{N},+)$:

Existe algum grupóide (A,θ) *não isomorfo a* $(\mathbb{N},+)$ *que verifique as propriedades* I-V, *com* A *no lugar de* $\mathbb{N}$ *e com* θ *no de* $+$?

É fácil ver que existe um tal grupóide. Um exemplo é o grupóide $(\mathbb{R}^+,+)$. Porquê?

Procuremos uma propriedade de ($\mathbb{N}$,+) que não seja verificada em ($\mathbb{R}^+$,+):

Existe um número natural que dá origem a todos os outros. Qual? O número 1. Como?

Por adições sucessivas:

$$1+1, \quad 1+1+1, \quad 1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1, \ldots$$

Em resumo, podemos acrescentar à lista anterior a seguinte propriedade:

VI. *Existe um número natural que gera todos os outros por adição sucessiva.*

No número seguinte daremos um enunciado desta propriedade em termos de lógica simbólica. Pergunta-se, entretanto:

Existe algum elemento de $\mathbb{R}^+$ *que gere todos os outros por adição sucessiva?*

Suponhamos que existia um elemento u de $\mathbb{R}^+$ nestas condições. Então todos os outros números positivos se podiam obter a partir de u por adições sucessivas:

$$u+u \quad , \quad u+u+u \quad , \quad u+u+u+u \quad , \quad \cdots$$

Seria, portanto, válida em $\mathbb{R}^+$ a propriedade:

$$x \neq u \Rightarrow x > u \ (^1)$$

---

(1) A justificação deste facto será por enquanto intuitiva.

Mas isto é impossível, visto que:

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ : \; x < u$$

Com efeito, sendo *u* um número positivo qualquer, se tomarmos por exemplo $x = u/2$ teremos $x \in \mathbb{R}^+$ e $x + x = u$, donde $x < u$. Em conclusão:

O grupóide aditivo $\mathbb{R}^+$ *não tem a propriedade correspondente a* VI.

Resta saber se a lista de propriedades I-VI já chega para caracterizar a estrutura de $(\mathbb{N},+)$. Mas, para isso, precisamos de dar novas formas à propriedade VI, o que faremos nos números seguintes.

NOTA. Pode ainda perguntar-se: 'O que nos leva a afirmar que a propriedade VI é verdadeira? Como veremos, essa propriedade resulta da *própria noção de conjunto finito* e da definição de número natural como cardinal do conjunto finito não vazio.

2. **Princípio da indução em** $\mathbb{N}$**. Sucessões; definições por recorrência.** Tentemos, agora, formular com símbolos de lógica matemática a propriedade VI atrás indicada. Seja X o conjunto formado pelo número 1 e por todos os outros números que se podem obter a partir de 1 por adição sucessiva. Temos, então, por um lado

(1) $$1 \in X$$

Por outro lado, se $n \in X$, também $n + 1 \in X$, isto é:

(2) $$n \in X \underset{n}{\Rightarrow} n + 1 \in X$$ *(porquê?)*

Ora, a proposição:

'O número 1 *gera todos os outros números naturais por adição sucessiva'*

significa precisamente o seguinte:

'Só existe um conjunto X *de números naturais que verifica as condições* (1) *e* (2)*; esse conjunto é* $\mathbb{N}$'.

Simbolicamente, esta proposição traduz-se do seguinte modo:

(3) $$1 \in X \wedge (n \in X \underset{n}{\Rightarrow} n + 1 \in X) \underset{X}{\Rightarrow} X = \mathbb{N}$$

supondo que n varia em $\mathbb{N}$ e X em $\mathcal{P}$ ($\mathbb{N}$).

Note-se que (3) ainda não é a tradução simbólica da propriedade VI: esta apenas afirma que *existe, pelo menos, um* número natural que gera todos os outros. A sua tradução simbólica, consequência do (3), será pois:

$$\exists u: \; u \in X \wedge (n \in X \underset{n}{\Rightarrow} n + u \in X) \underset{X}{\Rightarrow} X = \mathbb{N}$$

Mas é da propriedade (3) que vamos ocupar-nos agora. Esta é chamada *princípio de indução matemática (em* $\mathbb{N}$*)* e pode ser enunciada, em linguagem mista (parcialmente simbólica), do seguinte modo:

PRINCIPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA. *Se um conjunto* X *de números naturais verifica as duas seguintes condições:*

$$1 \in X \quad , \quad n \in X \underset{n}{\Rightarrow} n + 1 \in X,$$

então X *só pode ser* $\mathbb{N}$.

Este princípio tem uma grande importância em matemática, como veremos. Em primeiro lugar, pode ser utilizado para definir as mais diversas funções de *uma ou mais variáveis naturais.*

Consideremos primeiramente uma função f de uma só variável natural, isto é, uma aplicação de $\mathbb{N}$ num conjunto A *qualquer*. Então f faz corresponder a cada número natural *n* um determinado elemento a_n de A, conforme o esquema:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots \end{pmatrix}$$

Neste esquema, os valores de f aparecem dispostos uns a seguir aos outros, segundo a ordem dos números naturais aos quais correspondem, como uma espécie de *sequência infinita:*

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$$

Por este facto se diz que f é uma *sucessão* ou, mais precisamente, uma $\mathbb{N}$-*sucessão*. Assim:

DEFINIÇÃO. Chama-se $\mathbb{N}$-*sucessão* de elementos dum conjunto A toda a aplicação f de $\mathbb{N}$ em A. Os valores de f dizem-se *termos* da sucessão: f(1) o *primeiro termo,* f(2) o *segundo termo,* ..., f(n) o *termo de ordem* n (ou *termo geral*) da sucessão.

Note-se que, no esquema anterior, as expressões 'f(n)' e 'a_n' são equivalentes.

De modo análogo se define '$\mathbb{N}_0$-sucessão' e '$\mathbb{Z}$-sucessão'. Quando não houver perigo de equívoco, diremos apenas 'sucessão'.

Assim, o conceito de 'sucessão' aparece-nos como extensão do conceito de 'sequência'. Com efeito, uma *sequência de* n *elementos de* A é uma aplicação do conjunto {1, 2, ..., n} no conjunto A (cf. 1.º vol., 1.º tomo, pg. 120). Podíamos então chamar *sucessões finitas* às sequências, para as distinguir das $\mathbb{N}$-sucessões, $\mathbb{N}_0$-sucessões, etc. É só para simplificar a linguagem que chamamos às primeiras 'sequências' e às segundas 'sucessões'.

O aluno já conhece inúmeros exemplos de sucessões *(indique os 4 primeiros termos de cada uma)*:

1) a sucessão dos números naturais (a aplicação $n \curvearrowright n$);

2) a dos números pares (a aplicação $n \curvearrowright 2n$);

3) a dos números ímpares (a aplicação $n \curvearrowright 2n-1$);

4) a dos quadrados perfeitos (a aplicação $n \curvearrowright n^2$);

5) a das potências de 10 (a aplicação $n \curvearrowright 10^n$);

6) a das potências de π (a aplicação $n \curvearrowright \pi^n$);

7) a das potências dum operador φ qualquer (a aplicação $n \curvearrowright \varphi^n$); etc.

Tal como sucede com as sequências, é necessário não confundir nunca uma sucessão f *com o conjunto dos seus termos (contradomínio de* f*).*

Por exemplo, se f é a sucessão definida pela expressão *'resto da divisão de* n *por* 4', isto é:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & \ldots \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente

$$f = (1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

o *conjunto dos termos da sucessão* será:

$$D'_f = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

Como conjunto que é, D'_f *não depende da ordem* dos seus elementos e estes são *todos distintos*.

Muitas vezes, uma sucessão (como qualquer outra aplicação) pode ser dada por uma expressão designatória de tipo já conhecido. Por exemplo, a sucessão dos números ímpares

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots$$

pode ser definida pela expressão designatória $2n-1$, também chamada 'expressão do termo geral'.

Mas nem sempre assim acontece. Tal é, por exemplo, o caso da sucessão dos números primos

$$2,\ 2,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

(Não confundir com o *conjunto dos números primos!*)

Ora, há processos extremamente gerais para definir sucessões, chamados MÉTODOS DE RECORRÊNCIA. Estes métodos baseiam-se no PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, consistindo essencialmente num processo que permite determinar cada termo (a partir de certa ordem), uma vez conhecidos um ou mais termos anteriores.

Seja f, por exemplo, uma sucessão que verifique as duas seguintes condições:

$$(1)\quad f(1) = 1,\quad f(n+1) = \begin{cases} f(n)+1, & \text{se } f(n) \neq 2 \\ 0, & \text{se } f(n) = 2 \end{cases}$$

Será então:

$$f(1) = 1,\ \ f(2) = 2,\ \ f(3) = 0,\ \ f(4) = 1,\ \ f(5) = 2,\ \ f(6) = 0,$$

$$f(7) = 1,\ \ f(8) = 2,\ \ f(9) = 0,\ \ f(10) = 1,\ \ \ldots$$

Desde logo se vê, *intuitivamente,* que as condições (1) definem uma função de $\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{N}_0$, e que se tem:

$$f(n) \equiv \text{resto da divisão de } n \text{ por } 3,$$

segundo a terminologia habitual.

Mas, para demonstrar rigorosamente que existe uma e uma só sucessão f que verifica as condições (1), é necessário aplicar o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA:

Seja X o conjunto dos números naturais x tais que o valor de $f(x)$ é univocamente determinado pelas condições (1). Tem-se, então:

$$1 \in X \quad \text{(pela 1.ª condição)}$$

$$n \in X \Rightarrow n + 1 \in X \quad \text{(pela 2.ª condição)}$$

Logo $X = \mathbb{N}$. Quer dizer: as referidas condições definem uma, e só uma sucessão, que é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}_0$.

Este processo de definição de f, por meio das condições (1), é pois um processo de recorrência. A primeira condição, $f(1) = 1$, é chamada *'condição inicial'*; a segunda condição é chamada *'fórmula de recorrência'*.

A partir da anterior função f podemos agora definir, *também por recorrência,* uma nova função g, do seguinte modo:

1) condição inicial: $g(1) = 0$

2) fórmula de recorrência: $g(n+1) = \begin{cases} g(n) & \text{se } f(n) \neq 2 \\ g(n)+1 & \text{se } f(n) = 2 \end{cases}$

Veja se consegue identificar esta função g, utilizando uma expressão designatória que já conheça.

Vejamos outro exemplo. Recordemos que, sendo *r* um número real qualquer, se chama *progressão aritmética de razão* r a toda a sucessão φ em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com r. Deste modo, se for *a* o primeiro termo, a sucessão fica definida pelo seguinte processo de recorrência:

$$\varphi(1) = a \quad , \quad \varphi(n+1) \equiv \varphi(n) + r$$

e é fácil reconhecer agora (intuitivamente) que

$$\varphi(n) \equiv a + (n-1)r$$

Analogamente para as *progressões geométricas* (convém rever exemplos).

Aliás, em qualquer grupóide A, aditivo ou multiplicativo, as noções de 'produto por um número natural' e de 'potência de expoente natural', podem ser definidas, respectivamente, pelos seguintes processos de recorrência:

$$\begin{cases} 1 \cdot a = a \\ (n+1)a = na + a \end{cases} \qquad \begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases} \qquad \forall a \in A$$

A própria noção de *'operação* θ *iterada'* (em particular, *adição* ou *multiplicação iterada*) pode ser definida por recorrência:

$$\underset{k=1}{\overset{1}{\ominus}} a_k = a_1 \quad , \quad \underset{k=1}{\overset{n+1}{\ominus}} a_k = \underset{k=1}{\overset{n}{\ominus}} a_k \ominus a_{n+1}$$

Vendo bem, este é na verdade o *primeiro processo rigoroso*, que nos aparece para definir tais noções.

Notemos ainda o seguinte facto evidente:

Em $\mathbb{N}_0$ *também é válido um princípio de indução, semelhante ao de* $\mathbb{N}$*: a única diferença está em que a condição* $1 \in X$ *deve agora ser substituída pela condição* $0 \in X$.

Deste modo, o que foi dito para $\mathbb{N}$-sucessões, aplica-se, *mutatis mutandis,* a $\mathbb{N}_0$-sucessões (aplicações de $\mathbb{N}_0$ em qualquer conjunto A), que continuaremos a chamar simplesmente 'sucessões', quando não houver perigo de confusão.

Notemos, por último, que os processos de recorrência se estendem à definição de *funções de duas ou mais variáveis* em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$. Tais funções dizem-se respectivamente *sucessões duplas, sucessões triplas,* etc. e, dum modo geral, *sucessões múltiplas*. Disto vamos ver já exemplos.

EXERCICIOS:

I. Identifique a função f definida em $\mathbb{N}_0$ pelas condições: $f(0) = 1$, $f(n+1) = f(n).(n+1)$.

II. Escreva os 4 primeiros termos da sucessão φ assim definida:

$$\varphi(1) = a, \quad \varphi(n+1) \equiv a^{\varphi(n)}, \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{N}.$$

Parece-lhe que existe alguma expressão conhecida para o termo geral de φ?

III. Escreva os 5 primeiros termos da sucessão a_n tal que

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Suspeita de alguma expressão conhecida para o termo geral?

IV. Represente por uma tabela a sucessão dupla $a_{m,n}$ tal que:

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{m,1} = m, \quad a_{1,n} = n \\ a_{m+1,\ n+1} = \dfrac{a_{m+1,n} + a_{n,m+1} - 2a_{m,n}}{2} \end{cases}$$

V. Identifique a função $f(m,n)$ tal que: $f(m,0) \equiv f(m,m) \equiv 1$, $f(m+1,\ n+1) \equiv f(m,n) + f(m,n+1)$
sendo $D_f = \{(m,n):\ 0 \leqslant n \leqslant m\}$, com $m,n \in \mathbb{N}_0$.

3. **O princípio de indução matemática em termos de compreensão. Demonstrações por indução.** Os primeiros termos da sucessão a_n considerada no exercício III do número anterior, são:

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{17}{16}, \quad \ldots$$

ou seja:

$$1+1 \quad , \quad 1+\frac{1}{2} \quad , \quad 1+\frac{1}{4} \quad , \quad 1+\frac{1}{8} \quad , \quad 1+\frac{1}{16} \quad , \quad \ldots$$

Ora $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, ...

Isto leva-nos a admitir a hipótese de que seja

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^n} \quad , \quad \text{para } \textit{todo} \text{ o } n \in \mathbb{N}_0.$$

Esta condição é verificada para n = 0, 1, 2, 3, 4, e continuará a ser confirmada para outros valores de *n*. Mas nós queremos *demonstrar* que é verificada para *todos!*

Se, em vez de matemática, se tratasse de física, contentar--nos-íamos em verificar a hipótese para um *grande número de valores de* n. Então, aplicando o MÉTODO DE INDUÇÃO EXPERIMENTAL, concluiríamos que o facto é verdadeiro para *todos* os valores de n. Mas é óbvio que tal conclusão nunca teria o carácter de *certeza absoluta,* ou melhor, de *certeza matemática:* tratar-se-ia de um resultado obtido por *indução experimental* e não por *dedução.* Como demonstrá-lo matematicamente? Eis a resposta:

Recorrendo ao que chamámos 'PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA' (neste caso em $\mathbb{N}_0$). O nome foi escolhido por analogia com o método de indução das ciências experimentais. Mas pode originar um equívoco que convém desde já eliminar:

O método de *indução matemática* é, na realidade, um processo de *dedução,* isto é, uma das inúmeras formas do raciocínio dedutivo — precisamente um dos mais potentes processos de demonstração.

Para indicar como se aplica o referido princípio nas demonstrações, convém passá-lo da *forma extensiva* à *forma compreensiva.*

Como sabemos, todo o conjunto X de números naturais pode ser definido por uma *condição* ou *propriedade* P(n), sendo *n* uma variável em $\mathbb{N}$ e tendo-se:

$$n \in X \underset{n}{\Leftrightarrow} P(n)$$

Deste modo, a proposição $1 \in X$ traduz-se por $P(1)$ e a implicação $n \in X \underset{n}{\Rightarrow} n+1 \in X$ assume a forma

$$(2) \qquad P(n) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+1)$$

DEFINIÇÃO. Diz-se que, no universo $\mathbb{N}$, uma propriedade $P(n)$ *é hereditária*, sse cumpre a condição (2), isto é, sse o facto de ser verificada por um número natural *n* implica o facto de ser verificada po $n+1$, qualquer que seja *n*. (Analogamente em $\mathbb{N}_0$.)

Por exemplo, a propriedade *ser maior que* 5 (ou seja a propriedade $n > 5$) é uma propriedade hereditária, visto que $n > 5 \Rightarrow n+1 > 5$.

É visível que o termo 'hereditário' nesta acepção foi escolhido por analogia com a noção biológica de hereditariedade: o número $n+1$ chama-se *sucessor de* n; dizer que uma propriedade $P(n)$ é hereditária significa que essa propriedade, uma vez verificada num número n, se *transmite necessariamente* ao seu sucessor[1].

Posto isto, é fácil ver que o princípio de indução matemática toma o seguinte aspecto:

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO (em $\mathbb{N}$). *Se uma propriedade hereditária* $P(n)$ *é verificada para* $n=1$, *então é verdadeira qualquer que seja* n. *Simbolicamente:*

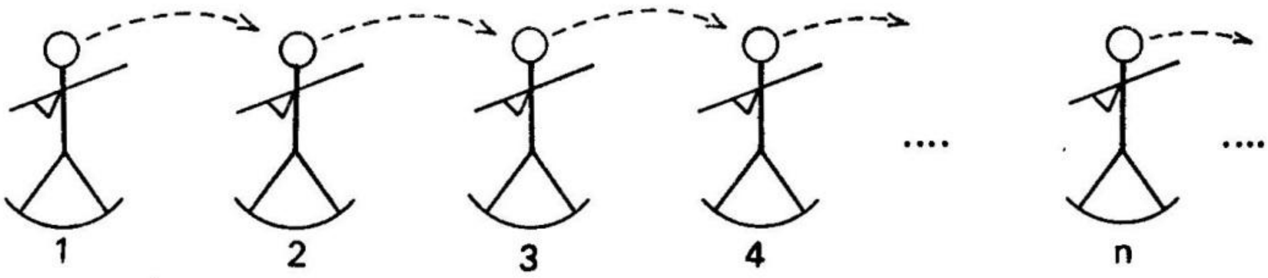
$$[P(n) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+1)] \wedge P(1) \underset{P}{\Rightarrow} \forall n: P(n)$$

Este enunciado pode tornar-se ainda mais intuitivo, usando uma imagem. Imaginemos uma fileira de soldados de chumbo, coloca-

---

(1) Note-se entretanto que, ao contrário desta, a hereditariedade biológica é apenas uma *tendência* e não uma *norma sem excepção.*

dos de tal modo que, *se um qualquer cair para trás, o que se lhe segue cai também:*



Então é óbvio que, *se o primeiro cai para trás, todos os soldados caem para trás.*

Eis, agora, o princípio de indução sob a FORMA DE SILOGISMO:

$$\begin{array}{rl} P(n) \Rightarrow P(n+1) & \text{(PREMISSA MAIOR)} \\ \underline{P(1) \qquad\qquad} & \text{(PREMISSA MENOR)} \\ \forall n,\ P(n) & \text{(CONCLUSÃO)} \end{array}$$

É claro que todas estas considerações se estendem de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}_0$, substituindo P(1) por P(0).

Antes de tornar ao exemplo inicial, o que faremos mais adiante, convém aplicar o método de indução matemática a casos mais simples.

EXEMPLOS E EXERCÍCIOS:

I. Demonstrar a seguinte proposição:

Em qualquer semigrupo (A, •) *comutativo, tem-se:*

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a, b \in A$$

No 1.º volume, 2.º tomo, pg. 21, já foi dada uma *demonstração intuitiva* deste teorema. Para uma *demonstração rigorosa*, do ponto de vista lógico, é necessário recorrer ao método de indução matemática (em $\mathbb{N}$).

Para compreender melhor a demonstração, comecemos por supor que o semigrupo considerado é precisamente $(\mathbb{N},\cdot)$, munido da multiplicação usual (que também se pode indicar com o sinal × ou com um espaço em branco). Suponhamos, por exemplo, $a = 2$ e $b = 5$. Trata-se então de provar que

$$(3) \qquad (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Neste caso $P(n)$ é a propriedade $(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$. Ora $P(1)$ é uma proposição verdadeira, isto é:

$$(4) \qquad (2 \times 5)^1 = 2^1 \times 5^1$$

Resta então provar que $P(n) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+1)$. Seja p um número natural *qualquer* (isto é, suponhamos que a letra p é uma *constante*, que designa um número natural, escolhido *arbitrariamente:* por exemplo 1, 2, mil, um milhão, etc.) e suponhamos que p verifica a condição $P(n)$, isto é, que é verdadeira a proposição:

$$(5) \qquad (2 \times 5)^p = 2^p \times 5^p$$

Ora, segundo a definição de potência dada no número anterior

$$(2 \times 5)^{p+1} = (2 \times 5)^p \times (2 \times 5)$$

Logo

$$\begin{aligned} (2 \times 5)^{p+1} &= (2^p \times 5^p) \times (2 \times 5) && \textit{(porquê?)} \\ &= (2^p \times 2) \times (5^p \times 5) && \textit{(porquê?)} \end{aligned}$$

e portanto

$$(6) \qquad (2 \times 5)^{p+1} = 2^{p+1} \times 5^{p+1} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Assim, supondo que é verdadeira (5), prova-se que é verdadeira (6). E, *como a letra* p *pode designar qualquer número natural,* fica provado que

$$(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n \underset{n}{\Rightarrow} (2 \times 5)^{n+1} = 2^{n+1} \times 5^{n+1},$$

quer dizer: a propriedade P(n) é hereditária. Daqui e de (4), aplicando o PRINCIPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, conclui-se (3).

Notemos, agora, que a escolha particular dos números 5 e 7 não influiu em nada na demonstração. Assim, se nos lugares dos símbolos 2 e 5 escrevermos as letras a e b, tomadas como *constantes* (isto é, como designações de números naturais *determinados,* mas arbitrários), todo o raciocínio continua certo. Isto leva-nos a concluir que

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Finalmente, se em vez do semigrupo (N, •) considerarmos *qualquer outro semigrupo* (A, •) *comutativo,* o raciocínio continua certo, ficando assim demonstrada a proposição inicial.

Note-se que nesta proposição são *variáveis,* sujeitas a quantificador universal, não só a letra *n,* como ainda as letras a, b, A e o *próprio sinal • de multiplicação, que pode receber as mais diversas interpretações.* Pode inclusivamente ser substituído pelo sinal +, *traduzindo-se a linguagem multiplicativa na linguagem aditiva:*

$$n(a + b) = n\,a + n\,b \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a, b \in A,$$

supondo, é claro, que (A,+) é um semigrupo comutativo. Pode ainda ser substituído por outros símbolos, tais como θ, Φ, etc.

II. Demonstrar a seguinte proposição:

Qualquer que seja o semigrupo (A, •), *tem-se:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad , \quad \forall m,n \in \mathbb{N} \quad ; \quad a \in A$$

Seja *a* um determinado elemento de A (arbitrário) e *m* um determinado elemento de $\mathbb{N}$ (também arbitrário). Trata-se, então, de provar que

$$(7) \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para isso, vamos seguir o MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, sendo P(n) a propriedade $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. É claro que estamos a supor *a, m* constantes e *n* variável *(variável de indução)*.

Ora, a proposição P(1) é verdadeira, isto é:

$$(8) \qquad a^m \cdot a^1 = a^{m+1} \qquad \textit{(porquê?)}$$

Seja, agora, *k* um número natural *qualquer* e suponhamos que é verdadeira a proposição

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}$$

(esta suposição é chamada *'hipótese de indução'*). Ora

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m(a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k)a \qquad \textit{(porquê?)}$$

donde, pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{k+1} &= a^{m+k} \cdot a \\ &= a^{m+(k+1)} \qquad \textit{(porquê?)} \end{aligned}$$

Assim se vê que

$$a^m a^n = a^{m+n} \underset{n}{\Rightarrow} a^m a^{n+1} = a^{m+(n+1)}$$

o que, juntamente com (8), prova (7).

Finalmente, como *a* é um elemento *arbitrário* de A e *n* um elemento arbitrário de $\mathbb{N}$, fica provado o que se pretendia.

III. Provar que a soma dos *n* primeiros números naturais é:

$$\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É claro que:

$$\text{(9)} \qquad \sum_{p=1}^{1} p = 1 = \frac{1\,.\,(1+1)}{2}$$

Suponhamos que a letra *n* designa um número natural arbitrário ([1]) e que é verdadeira a proposição:

$$\text{(10)} \qquad \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{(hipótese de indução)}$$

Ora

$$\sum_{p=1}^{n+1} p = \sum_{p=1}^{n} p + (n+1) \qquad \textit{(porquê?)}$$

([1]) Muitas vezes, por comodidade, um mesmo símbolo é usado umas vezes como *constante arbitrária* e outras vezes como *variável*, numa mesma demonstração. Basta que não haja perigo de confusão.

Então virá, pela hipótese de indução:

$$\sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

e, portanto:

$$(11) \qquad \sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$$

Ora, esta fórmula é precisamente a que resulta de (10), substituindo *n* por n + 1. Assim, tornando a considerar a letra n como variável [1], vê-se que a propriedade (10) é hereditária e, como é verificada para n = 1, fica provado o que se pretendia.

IV. Provar que a soma dos quadrados de 1, 2, ..., n é dada por

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

V. Provar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{1}{2} n\,(n+1)]^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

VI. Provar que

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad r \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

[1] Ver nota anterior.

4. Nova forma do raciocínio de indução matemática*. Podemos agora tornar ao exercício III do n.º 2, em que era definida uma sucessão a_n pelas condições:

$$(1) \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Para provar que $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, há que recorrer à seguinte forma do princípio de indução (em $\mathbb{N}_0$):

Se uma propriedade P(n) *é verificada para* n = 0 *e para* n = 1, *e se, além disso,*

$$P(n) \wedge P(n+1) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+2),$$

então P(n) *é universal (em* $\mathbb{N}_0$*)*.

Para demonstrar esta proposição, vamos recorrer à primeira forma do *princípio da indução matemática (em* $\mathbb{N}_0$*)*. Ponhamos:

$$(2) \qquad Q(n) \equiv P(n) \wedge P(n+1)$$

É fácil ver que *se tem sempre:*

$$(3) \qquad P(n) \wedge P(n+1) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+1)$$

Suponhamos, agora, que se verifica a condição:

$$P(n) \wedge P(n+1) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+2)$$

Então, daqui e de (3), resulta:

$$P(n) \wedge P(n+1) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+1) \;\; P(\wedge n+2)$$

ou seja, atendendo a (2):

$$(4) \qquad\qquad Q(n) \underset{n}{\Rightarrow} Q(n+1)$$

Suponhamos, agora, que as proposições $P(0)$ e $P(1)$ são verdadeiras. Então será verdadeira $P(0) \wedge P(1)$ ou seja $Q(0)$. Daqui e de (4) resulta (pelo princípio de indução matemática em $\mathbb{N}_0$), que $Q(n)$ é universal, ou seja:

$$P(n) \wedge P(n+1) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde:

$$P(n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

A esta forma do princípio de indução corresponde um NOVO TIPO DE SILOGISMO, que é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} P(n) \wedge P(n+1) \underset{n}{\Rightarrow} P(n+2) & \text{(PREMISSA MAIOR)} \\ \underline{P(1) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \text{(PREMISSA MENOR)} \\ \qquad\qquad \forall n,\ P(n) & \qquad \text{(CONCLUSÃO)} \end{array}$$

Posto isto, será um simples exercício, que o leitor pode resolver facilmente, provar o que se pretendia acerca da sucessão definida por (1).

5. **Regresso ao problema inicial: caracterização da estrutura de** ($\mathbb{N}$, +). No n.º 1 organizámos uma lista de seis propriedades da adição em $\mathbb{N}$, com o objectivo de caracterizar a estrutura deste grupóide aditivo. Ora convém, desde já, notar que a propriedade III (comutativa da adição) pode ser deduzida das restantes pelo método de indução matemática.

Vamos apresentar aqui essa dedução, a título de curiosidade. Trata-se de provar que:

$$(1) \qquad m + n = n + m \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Comecemos por provar que

$$(2) \qquad 1 + n = n + 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É evidente que a propriedade $1 + n = n + 1$ é verificada para $n = 1$. Suponhamos, agora, que *n* é um determinado número natural e que a proposição

$$(3) \qquad 1 + n = n + 1$$

é verdadeira *(hipótese de indução)*. Ora

$$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 \qquad \textit{(porquê?)},$$

donde, pela hipótese de indução:

$$(4) \qquad 1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$$

Por conseguinte, (3) implica (4), qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, e assim fica provado (2).

Provemos agora (1). Seja n um número natural *qualquer*. Pretende-se provar que

$$(5) \qquad m + n = n + m \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

(Agora a letra *n* é considerada uma *constante arbitrária* e a letra *m* é a *nova variável de indução*.)

Segundo a proposição (2), já demonstrada, a *proposição*

$$(6) \qquad 1 + n = n + 1$$

é verdadeira. Suponhamos, agora, que *m* é um determinado número natural e que a proposição

$$(7) \qquad m + n = n + m$$

é verdadeira (hipótese de indução). Ora

$$(m + 1) + n = m + (1 + n) = m + (n + 1) = (m + n) + 1,$$

donde, pela hipótese de indução,

$$(m + 1) + n = (n + m) + 1$$

e portanto

$$(8) \qquad (m + 1) + n = n + (m + 1) \qquad \textit{(porquê?)}$$

Assim, (7) implica (8) qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, donde, atendendo a (6), se conclui (5). E, como *n* é arbitrário, fica demonstrada a proposição (1).

6. **Axiomática da teoria dos números naturais. Primeiras definições e teoremas.** Das cinco referidas propriedades da adição em $\mathbb{N}$, a terceira pode ser eliminada, visto que é consequência das restantes. Ficamos assim reduzidos ao seguinte sistema de propriedades:

A1. *Quaisquer que sejam os números naturais* a,b, *existe sempre um e um só número natural, que se chama 'soma de* a *com* b' *e se representa por* 'a + b'.

A2. $(a+b) + c = a + (b+c) \quad , \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$

A3. $a + b \neq a \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$

A4. $a \neq b \underset{a,b}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{N}\colon\ a + x = b \vee b + x = a$

A5. *Existe um (e um só) número natural que gera todos os outros por adição sucessiva.*

Como veremos, a conjunção destas propriedades é suficiente para definir a estrutura de $(\mathbb{N},+)$. Além disso, pode-se provar que estas propriedades são *independentes entre si,* isto é, nenhuma delas pode ser deduzida das restantes. Podemos, então, adoptá-las para *axiomas duma teoria dedutiva dos números naturais*(1).

DEFINIÇÃO 1. Chama-se *unidade* e designa-se pelo símbolo 1 o número natural cuja existência e unicidade é afirmada pelo axioma A5.

Desta definição e de A5 resulta imediatamente o PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA, tal como foi atrás enunciado, em

(1) A independência das propriedades *não é condição necessária* para que sejam tomadas como axiomas.

qualquer das suas formas, extensiva ou compreensiva. Como vimos no número anterior, este permite-nos demonstrar o seguinte:

TEOREMA. $a + b = b + a \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, temos a seguinte

DEFINIÇÃO 2. $a < b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : a + x = b$.

Posto isto, são *teoremas* que já sabemos demonstrar (ver n.º 1) as seguintes propriedades:

$$a < b \Rightarrow a \neq b$$

$$a < b \Rightarrow b \nless a$$

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

$$a \neq b \Rightarrow a < b \vee b < a$$

Um outro teorema é a *monotonia da adição:*

TEOREMA. $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})$.

Demonstração:

Suponhamos $a < b$. Então existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Portanto, se for c um número natural qualquer, tem-se $(a + x) + c = b + c$, donde:

$$(a + c) + x = b + c$$

Existe, pois, um $x \in \mathbb{N}$ que verifica esta condição, o que significa que $a + c < b + c$, q. e. d.

Consideremos, agora, o

PROBLEMA DA SUBTRACÇÃO. *Dados* $a, b \in \mathbb{N}$, *determinar* $x \in \mathbb{N}$ *tal que* $a + x = b$.

Segundo a DEFINIÇÃO 2, este problema é *possível,* se e só se $a < b$. Por outro lado:

TEOREMA. *Não pode existir mais de um número natural* x *tal que* $a + x = b$.

Demonstração:

Sejam x, y números naturais tais que $a + x = b$ e $a + y = b$. Se $x < y$, tem-se $a + x < a + y$ *(porquê?)* e portanto $b < b$, o que é impossível *(porquê?)*. Igualmente se vê que não pode ser $y < x$. Então só pode ser $x = y$ *(porquê?)*, o que demonstra o teorema.

Este teorema pode ainda ser apresentado com o seguinte aspecto (mudando o papel das letras):

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b \qquad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})$$

Esta é a chamada PROPRIEDADE DA REDUÇÃO (ou PROPRIEDADE DO CORTE) da adição em $\mathbb{N}$.

Em conclusão:

O problema da subtracção em $\mathbb{N}$, *tal como foi posto, é possível, sse* $a < b$, *e nesse caso é determinado.*

Já sabemos que se chama *diferença entre* b *e* a e se representa por $b - a$ o número x procurado.

DEFINIÇÃO 3. Chama-se *multiplicação* a operação que faz corresponder a cada par (n,a) de números naturais um determinado número natural, que se chama *produto de* n *por* a e se representa por $n \times a$, $n . a$ ou na, de acordo com as seguintes condições:

$$1 \cdot a = a \quad , \quad (n+1)a = na + a \quad , \quad \forall n, a \in \mathbb{N}$$

Desde logo se reconhece que esta definição é um caso particular da definição de *produto de um número natural* n *por um elemento* a *dum semigrupo* (A, +). Podemos, pois, considerar desde já demonstrado, por indução matemática, o *teorema da distributividade à esquerda:*

$$(m + n)a = ma + na \quad , \quad \forall m, n, a \in \mathbb{N}$$

E, como o semigrupo ($\mathbb{N}$, +) é comutativo, segue-se o teorema da *distributividade à direita:*

$$n(a + b) = n\,a + n\,b \quad , \quad \forall n, a, b \in \mathbb{N}$$

Mas daqui vai resultar a *comutatividade da multiplicação:*

TEOREMA. $ab = ba \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$

Demonstração:*

Comecemos por demonstrar que

(1) $$a \cdot 1 = 1 \cdot a (= a) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

A propriedade $a \cdot 1 = a$ é manifestamente verificada quando $a = 1$. Suponhamos, agora, que a propriedade é verificada por um determinado número natural n:

$$n \cdot 1 = n \qquad \text{(hipótese de indução)}$$

Ora, tem-se $(n+1)\cdot 1 = n\cdot 1 + 1$ *(porquê?)*, donde, pela hipótese de indução:

$$(n+1)\cdot 1 = n+1 = 1\cdot(n+1)$$

Fica, assim, provado (1).

Seja, agora, *a* um *determinado número natural arbitrário*. Trata-se de provar que

$$(2) \qquad a\,b = b\,a \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

A propriedade $a\,b = b\,a$ (em que *a* é constante e *b* variável) é verificada quando $b = 1$, segundo (1). Seja, agora, *n* um determinado número natural e suponhamos que é verdadeira a proposição:

$$(3) \qquad a\,n = n\,a \qquad \text{(hipótese de indução)}$$

Ora, $a(n+1) = an + a$ *(porquê?)*. Logo, pela hipótese de indução, tem-se:

$$a(n+1) = n\,a + a,$$

donde:

$$(4) \qquad a(n+1) = (n+1)a \qquad \textit{(porquê?)}$$

Assim, (3) implica formalmente (4), o que acaba de provar (2). E, como *a* é arbitrário, fica provado o teorema.

Analogamente para a *associatividade da multiplicação:*

TEOREMA. $(ab)c = a(bc) \quad , \quad \forall a, b, c.$

Agora convém tomar as letras a,b para constantes arbitrárias e a letra *n*, no lugar de c, para variável de indução. Dão-se apenas os passos essenciais da demonstração:

Tem-se, evidentemente: $(ab) \cdot 1 = a(b \cdot 1)$

Hipótese de indução: $(ab)n = a(bn)$

$$\text{Ora, } (ab)\,(n+1) = (ab)n + ab = a(bn) + ab$$
$$= a(bn + b) = a(b(n+1))$$

Logo, $(ab)\,(n+1) = a(b(n+1))$, o que acaba de provar o teorema.

Outro teorema é o da *monotonia da multiplicação:*

TEOREMA. $a < b \Rightarrow a\,c < b\,c \qquad (a, b, c \in \mathbb{N})$

Demonstração:

Suponhamos $a < b$. Então existe x em $\mathbb{N}$ tal que $a + x = b$. Seja, agora, c um número natural qualquer. Tem-se:

$$ac + xc = bc \qquad \textit{(porquê?)}$$

Existe, pois, um número natural $y (= xc)$ tal que $ac + y = bc$, o que significa que $ac < bc$.

PROBLEMA DA DIVISÃO. *Dados dois números naturais* a,b, *determinar um número natural* x *tal que* $ax = b$.

Sabemos que este problema nem sempre é possível em $\mathbb{N}$, mas *quando possível, é determinado*. Com efeito:

TEOREMA. *Quaisquer que sejam os números naturais* a,b, *não pode existir mais de um número natural* x *tal que* $ax = b$.

Com efeito, suponhamos que se tem $ax = b$ e $ay = b$, com $a,b,x,y \in \mathbb{N}$. Então, vem $ax = ay$. Ora, se fosse $x < y$, viria $ax < ay$ *(porquê?)*, o que é impossível *(porquê?)*. Analogamente se vê que não pode ser $y < x$. Então só pode ser $x = y$.

Este teorema pode ser ainda apresentado com o seguinte aspecto:

$$ab = bc \Rightarrow a = b \qquad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})$$

Esta é a chamada PROPRIEDADE DA REDUÇÃO (ou PROPRIEDADE DO CORTE) da multiplicação em $\mathbb{N}$ (não verificada em $\mathbb{N}_0$).

Diz-se que b é *divisível por* a, sse existe x em $\mathbb{N}$ tal que $ax = b$. Nesta hipótese, segundo o teorema anterior, existe um único número x em $\mathbb{N}$ tal que $ax = b$. Esse número é chamado o *quociente de* b *por* a (ou a *razão entre* b *e* a) e representa-se por qualquer das notações:

$$b \div a \quad , \quad \frac{b}{a} \text{ ou } b/a$$

Tem-se, pois, *por definição:*

$$(b \div a) \cdot a = b \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} \cdot a = b$$

Quanto ao conceito de *potência* no universo $\mathbb{N}$, é claro que se trata de um caso particular do conceito de *potência de expoente natural* num semigrupo $(A, \cdot)$ comutativo, e as respectivas propriedades são teoremas que podemos, desde já, considerar demonstradas pelo método de indução matemática.

NOTA. Viria, agora, a propósito estudar o PROBLEMA DA DIVISÃO INTEIRA (em $\mathbb{N}_0$), ao qual se segue naturalmente, por um lado, o estudo rigoroso dos SISTEMAS DE NUMERAÇÃO e, por outro lado, a TEORIA DA DIVISIBILIDADE E DOS NÚMEROS PRIMOS (em $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$). Mas não podemos ocupar-nos por enquanto destes assuntos.

7. Caracterização da estrutura aditiva dos números naturais (conclusão)*. Resta provar que os axiomas A1 – A5 enunciados no número anterior caracterizam efectivamente a estrutura do grupóide $(\mathbb{N},+)$. Trata-se, pois, de provar o seguinte

TEOREMA. *Se um par* (U, θ), *constituído por um conjunto* U *e uma operação* θ, *verifica as condições* A1 – A5, *com* U *no lugar de* $\mathbb{N}$ *e com* θ *no lugar de* $+$, *então* (U,θ) *é necessariamente isomorfo a* $(\mathbb{N}, +)$.

Demonstração:

Suponhamos que (U,θ) verifica as seguintes condições (axiomas):

A'1). Para todo o par (a,b) de elementos de U existe um e um só elemento de U que se designa por $a\theta b$.

A'2. $(a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c) \quad , \quad \forall a, b, c \in U.$

A'3. $a\theta b \neq a \quad , \quad \forall a, b \in U.$

A'4. $a \neq b \Rightarrow \exists x: \ a\theta x = b \ \vee \ b\theta x = a$

A'5. Existe um e um só elemento de U que gera todos os outros pela operação θ iterada.

Este último axioma fornece um *princípio de indução em* U.

Com efeito, seja *u* o elemento de U que verifica a condição indicada em A'5. Então, se X designa um subconjunto de U, tem-se:

$$(a \in X \underset{a}{\Rightarrow} a\,\theta\,u \in X) \wedge u \in X \Rightarrow X = U,$$

o que é o *princípio de indução em* U *na forma extensiva*.

Definamos, agora, uma aplicação f do conjunto $\mathbb{N}$ no conjunto U, pelo seguinte *processo de recorrência:*

$$(1) \qquad \begin{cases} f(1) = u \\ f(n+1) = f(n)\,\theta\,u \end{cases}$$

Provaremos, sucessivamente, os seguintes factos:

I) $f(m+n) = f(m)\,\theta\,f(n) \quad , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Prova-se este facto, aplicando o *princípio de indução em* $\mathbb{N}$. Seja *m* um número natural qualquer. Tem-se, então:

$$f(m+1) = f(m)\,\theta\,u = f(m)\,\theta\,f(1) \qquad \text{(por definição de f)}$$

Suponhamos, agora:

$$f(m+n) = f(m)\,\theta\,f(n) \qquad \text{(hipótese de indução)}$$

Então

$$f[m+(n+1)] = f[(m+n)+1] = f(m+n)\,\theta\,u$$

donde, pela hipótese de indução e por A'2:

$$f\,[m+(n+1)] = [f(m)\,\theta\,f(n)]\,\theta\,u = f(m)\,\theta\,[f(n)\theta u] = f(m)\theta\,f(n+1)$$

o que acaba de provar I).

II) f é uma aplicação *injectiva*, isto é:

$$m \neq n \Rightarrow f(m) \neq f(n)$$

Com efeito, sejam *m* e *n* dois números naturais *distintos*. Então, segundo A4, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$m + x = n \quad \vee \quad n + x = m$$

Ora, se $m + x = n$, vem, segundo I):

$$f(m)\, \theta\, f(x) = f(n)$$

e portanto $f(m) \neq f(n)$. Analogamente concluímos que $f(m) \neq f(n)$, se $n + x = m$. Portanto $f(m) \neq f(n)$ sempre que $m \neq n$.

III) f é uma aplicação *sobre* U.

Com efeito, se pusermos

$$Y = \{y\colon\ \exists x \in \mathbb{N} \quad , \quad y = f(x)\},$$

Y é o contradomínio de f e tem-se:

(2) $\qquad u \in Y \qquad$ *(porquê)?*

Por outro lado, seja *a* um elemento qualquer de Y. Então existe um elemento n de $\mathbb{N}$ tal que $a = f(n)$ e tem-se:

$$f(n + 1) = f(n)\, \theta\, u = a\, \theta\, u$$

Portanto $a\, \theta\, u$ também pertence a Y e, assim:

(3) $\qquad a \in Y \Rightarrow a\, \theta\, u \in Y$

De (2) e (3) conclui-se, aplicando o *princípio de indução em* U, que Y = U e que portanto, f é uma aplicação de IN sobre A.

Ora, a conjunção das propriedades I), II) e III) exprime-se precisamente, dizendo que f *é um isomorfismo de* (IN,+) *sobre* (U,θ). Logo, (U,θ) é isomorfo a (IN,+), q. e. d.

ESCÓLIO. *Existe uma infinidade de grupóides* (U, θ) *que verificam a axiomática* A'1–A'5; *por exemplo: o conjunto dos números pares com a adição usual, o conjunto das potências de expoente natural de* 10 *com a multiplicação usual, o conjunto das potências naturais de um translação* $\neq$ I *no espaço* $\mathcal{E}$, *com a multiplicação interpretada no sentido de composição de aplicações, etc., etc. Mas, segundo o teorema anterior, todos os grupóides que verificam essa axiomática são isomorfos entre si — têm, portanto, a mesma estrutura.*

Aqui, como já se tem dito várias vezes, a palavra 'estrutura' pode designar a conjunção de todas as possíveis *propriedades formais* que se verificam num *qualquer* desses grupóides — visto que, segundo o teorema anterior e o PRINCIPIO DE ISOMORFIA, desde que essas propriedades se verifiquem num dos grupóides, verificam-se em todos os outros.

Disto resulta o seguinte

COROLÁRIO. *Toda a propriedade lógica da operação de um grupóide* (U,θ) *que verifique os axiomas* A'1-A'5 *é implicada formalmente por estes axiomas.*

Entre essas, as propriedades que não forem axiomas serão chamadas *teoremas.*

Aqui, ao falar de *implicação formal,* subentende-se que as variáveis aparentes (sujeitas a quantificador universal) são os símbolos U e θ. *Em particular, podemos ter* U = IN, θ = +.

Assim, a axiomática A'1-A'5 é comparável a um *sistema de 5 equações com duas incógnitas,* U e θ, que admite uma e uma só solução, *a menos de um isomorfismo:* o grupóide (IN,+).

Escusado será dizer que os axiomas A1-A5 são, apenas, uma concretização dos axiomas A'1-A'5, com IN no lugar de U e + no lugar de θ. *Mas, ao demonstrar os teoremas sobre números naturais, podemos abstrair por completo do significado dos símbolos* IN *e* +, *o que equivale a considerar estes símbolos como variáveis.*

Torna-se, agora, bem claro que a axiomática A1-A5 (como qualquer outra equivalente) não define afinal o conceito de número natural. Este conceito, tal como se forma no nosso espírito desde muito cedo, é o de *número cardinal de um conjunto finito (não vazio)* — e esse não aparece em nenhum dos referidos axiomas. O que a axiomática define é, apenas, a *estrutura interna do conjunto dos números naturais, a partir da adição.*

Na verdade, isto é quanto basta para desenvolver a aritmética dos números naturais, como *teoria de matemática pura.* Só quando se trata de *aplicar a aritmética,* temos de recorrer ao conceito de número natural.

Aliás, tudo o que se diz para números naturais aplica-se, de modo semelhante, a *números inteiros absolutos,* cuja estrutura aditiva pode ser definida por um sistema análogo de axiomas [não equivalentes ao anterior, porque os grupóides (IN,+) e (IN_0,+) não são evidentemente isomorfos].

NOTA. O conceito de número cardinal de um *conjunto finito não vazio* pode ser definido por indução do seguinte modo:

$$\begin{cases} \# A = 1 \text{ sse } A \text{ é conjunto singular} \\ \# (A \cup B) = \# A + 1 \text{ sse } B \text{ é conjunto singular e } B \not\subset A \end{cases}$$

O conceito de número cardinal estende-se à *classe dos conjuntos finitos, acrescida do conjunto vazio,* introduzindo a condição inicial seguinte:

$$\# A = 0 \Leftrightarrow A \text{ é conjunto vazio}$$

Mas estas definições pressupõem uma *caracterização axiomática da classe dos conjuntos finitos,* por exemplo em termos de 'reunião'. Um dos axiomas pode ser a proposição: *Dados dois conjuntos finitos* A *e* B, *existe sempre um e um só conjunto finito que é a reunião de* A *com* B. Outros axiomas podem ser propriedades formais da reunião, tais como a *associatividade,* a *comutatividade, a idempotência* e a *existência de elemento neutro* (o conjunto $\varnothing$). A relação de inclusão pode ser definida a partir da operação de reunião do seguinte modo:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Daqui a definição de 'conjunto singular': Diz-se que um conjunto A *é singular,* sse A não é vazio e não existe nenhum conjunto X distinto de A e de $\varnothing$ tal que $\varnothing \subset X \subset A$.

Seguem-se, finalmente, os dois axiomas decisivos:

α — *Qualquer que seja o conjunto finito* A, *existe pelo menos um conjunto singular* U *tal que* U $\not\subset$ A.

β — *Seja* $\mathcal{X}$ *uma classe de conjuntos finitos que verifique as três seguintes condições:*

1) *o conjunto vazio pertence a* $\mathcal{X}$ *;*

2) *todo o conjunto singular pertence a* $\mathcal{X}$ *;*

3) se A pertence a $\mathcal{X}$ e U é conjunto singular, também A ∪ U pertence a $\mathcal{X}$.

Então $\mathcal{X}$ é a classe de todos os conjuntos finitos.

O axioma α também é válido para conjuntos infinitos, assim como os anteriores. O axioma β (a que poderíamos chamar PRINCÍPIO DE INDUÇÃO NO UNIVERSO DOS CONJUNTOS FINITOS) é o que faz a separação rigorosa entre *conjuntos finitos* e *conjuntos infinitos*.

Note-se que o conceito de número cardinal também pode ser definido em *termos de compreensão:*

$$\underset{x}{\exists}^{o} P(x) \Leftrightarrow \sim \underset{x}{\exists} P(x)$$

$$\underset{x}{\exists}^{n+1} P(x) \Leftrightarrow \underset{x}{\exists} P(x) \wedge [P(x) \underset{x}{\Rightarrow} \underset{y}{\exists}^{n} x \neq y \wedge P(y)]$$

Aqui o símbolo $\underset{x}{\exists}^{n}$ lê-se 'existem *n* e só *n* elementos x tais que' (ou 'existem exactamente *n* elementos x tais que'). Trata-se de um *quantificador exacto de existência*. Exemplo:

Existem exactamente 2 *planetas que são satélites de Marte.*

8. **Axiomática de Peano.** A axiomática A1 – A5 define a estrutura de IN a partir da adição: as *noções primitivas* da axiomática são as noções de 'número natural' e de 'soma de dois números naturais'. A partir destas definem-se outras (chamadas por isso mesmo 'noções derivadas'), tais como a de 'produto de dois números', a

relação 'menor que', etc. Uma *noção derivada,* relativa a esta axiomática, é a de 'sucessor de um número':

Chama-se *sucessor de um número natural* n o número n + 1.

Usaremos a expressão 'suc n' como abreviatura de 'sucessor de n'.

Posto isto, consideremos as seguintes proposições:

I. *Para todo o número natural* n *existe um e um só número natural que é sucessor de* n.

II. *Se* suc a = suc b, *então* a = b.

III. *Existe um e um só número natural que não é sucessor de nenhum número natural.*

DEFINIÇÃO. Designa-se por '1' o número natural que não é sucessor de nenhum outro.

IV. *Se* X *é um conjunto de números naturais a que pertence* 1 *e tal que, se* n ∈ X, *também* suc n ∈ X, *então* X *é o conjunto de todos os números naturais*.

Relativamente à axiomática A1-A5 as proposições I-III são *teoremas,* isto é, são proposições que se demonstram, tomando A1, A2, A3, A4 e A5 como *axiomas*. A proposição IV é o *princípio de indução matemática em* ℕ.

Mas, desde logo se observa que as proposições I-IV são *mais simples* e, a bem dizer, *mais evidentes* do que as proposições A1-A5, que tomámos para axiomas. Além disso, acontece que as proposições A1-A5 (e portanto todas as que se deduzem destas) podem ser demonstradas, admitindo as proposições I-IV como *premissas* (ou *axiomas*) e definindo a adição por recorrência. *Por conseguinte, nada nos impede de adoptar o sistema de proposições* I-IV *como axiomática da teoria dos números naturais.* Esta axiomática é devida ao matemático italiano Peano, que foi um dos criadores da lógica matemática (a ele se deve, por exemplo, a distinção fundamental entre as relações $\in$ e $\subset$).

Não adoptámos a axiomática de PEANO, em vez da axiomática A1-A5, *pela simples razão de que as demonstrações das propriedades* A2, A3 *e* A4 *a partir do sistema* I-V *são árduas e de pouco interesse, exigindo uma repetição fatigante do princípio de indução.*

Note-se que, na axiomática de PEANO, são consideradas como *primitivas* a noção de 'número natural' e a de 'sucessor'. Pelo contrário, a noção de 'soma' é, neste caso, uma *noção derivada* e as proposições A1-A5 são *teoremas*. Houve portanto aqui uma mudança de *ponto de vista* (ou de *referencial*):

Em qualquer teoria dedutiva os termos 'axioma', 'teorema', 'noção primitiva', 'noção derivada' exprimem propriedades relativas. (Já no capítulo I assinalámos a relatividade das próprias noções de 'elemento' e de 'conjunto'.)

Mas, é curioso notar que o conjunto $\mathbb{N}_0$, com a noção usual de 'sucessor', também verifica a axiomática de PEANO (basta substituir '1' por '0' e 'número natural' por 'número inteiro absoluto'). Analogamente, se chamarmos '*sucessor de um número primo* n' ao menor número primo maior que n, vê-se que o conjunto dos números primos também verifica a axiomática (substituindo, é claro, '1' por '2' e 'número natural' por 'número primo').

Muitos outros exemplos podiam ser apresentados.

9. **Axiomáticas compatíveis.** Como vimos, o par $(\mathbb{N}, +)$ verifica a axiomática A1-A5, mas já o par $(\mathbb{N}^o, +)$ e o par $(\mathbb{N}, \cdot)$, com $\cdot$ no lugar de $+$, não a verificam. Analogamente, os pares $(\mathbb{N}, \text{suc})$, $(\mathbb{N}_0, \text{suc})$ verificam a axiomática de Peano, mas já o par $(\mathbb{Z}, \text{suc})$ não a verifica. Diremos, então, que o par $(\mathbb{N}, +)$ é uma *realização* (ou um *modelo*) da axiomática A1-A5, ao contrário dos outros dois, e que os pares $(\mathbb{N}, \text{suc})$, $(\mathbb{N}_0, \text{suc})$ são *realizações* da axiomática de Peano, ao contrário do par $(\mathbb{Z}, \text{suc})$.

Deste modo, as *realizações* de uma axiomática são comparáveis às *soluções* de um sistema de equações ou inequações. E, assim como o *número de incógnitas* no sistema pode ser 2, 3, 4, etc., assim também o *número de noções primitivas* da axiomática pode ser 2, 3, 4, etc. Pode, portanto, haver axiomáticas cujas realizações sejam *pares ordenados, ternos ordenados, quaternos ordenados,* etc.

Diz-se que uma axiomática é *compatível,* sse admite, pelo menos, uma realização (também se diz, neste caso, que os axiomas são *compatíveis*).

Por exemplo: *A axiomática que demos do conceito de grupo é compatível.* Uma realização muito simples desta axiomática é o par $(\mathcal{L}, \dot{\vee})$, em que $\mathcal{L}$ é o conjunto dos valores lógicos V, F, e $\dot{\vee}$ a operação de *disjunção exclusiva.* Como o conjunto $\mathcal{L}$ só tem dois elementos, torna-se muito fácil provar, *com certeza absoluta,* que o sistema de axiomas é efectivamente verificado.

Analogamente:

1) *A axiomática das álgebras de Boole é compatível.* Uma sua realização é o terno $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$.

2) *A axiomática dos corpos é compatível.* Uma sua realização é o terno $(\mathcal{L}, \dot{\vee}, \wedge)$.

Muitos outros exemplos podiam ser apresentados.

Pergunta-se, agora:

A axiomática A1-A5 *(ou a axiomática equivalente de Peano) é compatível?*

Por outros termos:

Existe, na verdade, o grupóide ($\mathbb{N}$, +)?

Eis aqui um problema dificílimo. E toda a dificuldade reside neste facto: deduz-se da própria axiomática que o conjunto $\mathbb{N}$ é *infinito.*

Com efeito, o axioma I de Peano diz-nos que existe uma aplicação $n \curvearrowright \operatorname{suc} n$ do conjunto $\mathbb{N}$ em si mesmo; depois o axioma II diz-nos que essa aplicação é *biunívoca;* finalmente, o axioma III diz-nos que a aplicação é *sobre* o conjunto $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Existe, portanto, uma aplicação biunívoca do conjunto* $\mathbb{N}$ *sobre uma parte estrita de* $\mathbb{N}$. Mas isto quer dizer que $\mathbb{N}$ é equipotente a uma sua parte estrita e, portanto, é *infinito.*

A questão é, pois, esta:

Existem afinal conjuntos infinitos?

Discutiremos este assunto mais adiante.

10. **Axiomáticas categóricas.** Se um sistema de equações é compatível, pode ser *determinado* ou *indeterminado,* conforme tem uma única solução ou mais de uma solução ([1]).

([1]) Também se diz que um sistema é determinado ou indeterminado, conforme tem um número finito ou uma infinidade de soluções. O significado dos termos varia com os autores e com os assuntos.

Pois bem:

Diz-se que uma axiomática é *categórica,* sse admite uma única realização, *a menos de um isomorfismo.* Quer isto dizer que o sistema de axiomas verifica as duas seguintes condições:

1) existe, pelo menos, uma realização do sistema (isto é, a axiomática é compatível);

2) todas as possíveis realizações da axiomática são isomorfas entre si.

Consideremos, por exemplo, a axiomática dos semigrupos (U, θ):

A'1. Para todo o par (a,b) de elementos de U existe um e um só elemento de U que se designa por $a\theta b$.

A'2. $(a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c) \quad , \quad \forall a, b, c \in U.$

Este sistema de axiomas é compatível, mas não categórico. Com efeito, conhecemos várias realizações desta axiomática (chamadas 'semigrupos'), que não são isomorfas entre si: o semigrupo $(\mathcal{L}, \vee)$, o semigrupo $(\mathcal{L}, \dot{\vee})$, o semigrupo $(A_3, +)$, etc., etc.

Porém, se juntarmos ao sistema A'1-A'2 os axiomas A'3, A'4, e A'5, considerados no n.º 6, obtemos a axiomática A'1-A'5 que já é categórica, segundo o teorema demonstrado nesse número.

Daí resulta que *todas as realizações dessa axiomática têm a mesma estrutura.*

Analogamente, *todas as realizações da axiomática de Peano têm a mesma estrutura.*

Assim, podemos dizer que uma axiomática é categórica, sse define uma única estrutura. Sob este ponto de vista, uma axiomática categórica é comparável a um sistema de equações que seja *determinado.*

Por exemplo, a axiomática dos grupos não é categórica, porque há uma infinidade de estruturas de grupo. A axiomática de geometria euclidiana dada por Hilbert é categórica; define, pois, uma única estrutura: a geometria euclidiana elementar.

Uma das características da matemática moderna consiste no estudo predominante de diversas classes de estruturas, definidas por *axiomáticas não categóricas:* estruturas de grupóide, de semigrupo, de grupo, de anel, de corpo, de álgebra de Boole, de conjunto ordenado, de espaço vectorial, de espaço afim, de espaço topológico, etc., etc.

11. **Axiomáticas independentes.** Diz-se que uma axiomática é *independente,* sse nenhum dos seus axiomas é implicado pela conjunção dos restantes.

Para ver se um dado axioma não é implicado pela conjunção dos restantes, o que se costuma fazer é procurar um modelo que verifique todos os axiomas, excepto o axioma considerado. Isto é comparável ao que se pode fazer, por exemplo, para provar que a inequação $x - y < 0$ é independente do sistema de inequações $x^2 - y^2 < 9$, $x + y > 0$: assim, o par (2,1) verifica estas duas e não verifica a primeira.

Se, pelo contrário, se consegue provar que um dos axiomas é implicado pela conjunção dos restantes, a axiomática não é independente, mas sim *redundante* (ou *pleonástica*): esse axioma pode, então, passar para a categoria de *teorema*. Foi isto o que verificámos a respeito da comutatividade da adição dos números naturais, quando, no n.º 5, demonstrámos essa propriedade a partir dos axiomas A1-A5.

No entanto, o problema da independência de uma axiomática é um problema lógico de menor importância: o que interessa principalmente é saber se a axiomática é compatível e se é ou não categórica. Adoptar uma axiomática que não seja independente é considerado apenas *pouco elegante,* do ponto de vista lógico, mas pode ser *admissível* e *cómodo,* principalmente se a demonstração de um axioma, a partir dos restantes, é difícil e de pouco interesse.

Todavia, continua em aberto o problema de saber se a axiomática A1-A5 é ou não compatível. Vamos, agora, discutir esse problema.

12. **Existem afinal conjuntos infinitos?** Como se viu no n.º 8, a axiomática de Peano (ou a axiomática equivalente A1-A5) implica que o conjunto IN é infinito. Tal não aconteceria se fosse suprimido o axioma segundo o qual *todo o número natural tem um sucessor* (ou o axioma segundo o qual *existe sempre a soma de dois números naturais*). Mas isso daria lugar a constantes embaraços, pois haveria muitas vezes dúvidas sobre a possibilidade de somar dois números dados — e *então os raciocínios, para serem rigorosos, acabariam por se tornar muito mais complicados.* É pois, principalmente, por razões de *comodidade* que se é levado a admitir o referido axioma. Mas não é só por isso.

Suponhamos que admitíamos o contrário, isto é, que admitíamos a existência de um *último número natural* — quer dizer, de um número natural *que não tem sucessor.* Isto parece desde logo uma arbitrariedade, que repugna à nossa intuição ou, pelo menos, ao *hábito* que adquirimos na nossa experiência quotidiana. Com efeito, a *indução experimental* leva-nos a admitir que é sempre possível *acrescentar mais um elemento a um conjunto.* Mas a indução experimental nunca nos dá uma certeza — e menos ainda neste caso.

No decorrer do tempo, o homem toma conhecimento de conjuntos cada vez mais numerosos. Uma pergunta que nos ocorre fazer, logo desde pequenos, é a seguinte:

'Quantas estrelas há no Céu?'

e, na imaginação do povo, associar-se esta pergunta a uma outra: 'Quantos peixes há no mar?'

Supõe-se, hoje, que existem (ou têm existido), biliões de galáxias, cada uma das quais tem biliões de estrelas. Já isso conduz a um número enorme de estrelas (1) — um *número astronómico,* como se costuma dizer. Se depois pensarmos nas partículas atómicas que porventura constituem cada estrela, somos levados a números inconcebíveis.

E, contudo, daí a afirmar que o *número de seres materiais é infinito,* vai uma grande distância.

Há anos, num jardim de infância em Nova York, quando estava a chover, alguém perguntou às crianças quantas gotas de chuva poderiam cair durante o dia naquela cidade (2). O maior número indicado foi 100. Para as crianças a palavra 'cem' significava já um número astronómico — *mas não infinito.* A pouco e pouco, porém, foram levadas a reconhecer que o número das gotas de chuva teria de ser muito maior e acharam que esse número deveria ser mais ou menos igual ao *número de grãos de areia de uma praia.* Para dar uma ideia de número tão grande, uma das crianças do jardim de infância escreveu na pedra o algarismo 1 seguido de 100 zeros. Mais tarde, outra criança (um sobrinho do Dr. Kasner, com 9 anos), achou que era preciso baptizar esse número e deu-lhe o nome *'googol'*.

---

(1) Cerca de 10^{23} estrelas ao todo.

(2) **Este facto é referido na obra de** EDWARD KASNER e JAMES NEWMAN, **'Mathematics and Imagination'**, Simon and Schuster, New York, 1940.

Ora bem, depois de cuidadosas investigações, chegou-se à conclusão de que o número de gotas de chuva que podem cair em Nova York durante um dia, um ano ou mesmo um século, será sempre muito inferior a um googol... Mais ainda, segundo os cálculos do físico EDDINGTON, baseados nas concepções de EINSTEIN, o número total de electrões do universo deve andar à volta de 10^{79}, portanto muito menos do que um googol...

Que dizer então de números tais como $10^{1\ \text{googol}}$ (googolplex), $10^{1\ \text{googolplex}}$ e de outros que podemos *facilmente designar*? Haverá pois expressões numéricas que, *teoricamente*, designem números naturais, mas que, *na prática*, não correspondem a nenhuns conjuntos finitos que tenham esses números por cardinais?

Uma resposta poderia ser esta:

Se ainda não se apresentaram até hoje tais conjuntos, poderão vir a apresentar-se no futuro. E os números não se fizeram só para contar *seres materiais* que se distribuam no *espaço* (gotas de chuva, grãos de areia, estrelas, electrões, etc.). Aplicam-se também a *acontecimentos*, que se sucedam no *tempo*.

Este é o ponto de vista que conduz à ideia de *infinito potencial*, que substitui a de *infinito actual* (ver NOTA HISTÓRICA do capítulo V do *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano).

As crianças de 4 a 6 anos, quando começam a aprender o sistema de numeração falada, emocionam-se facilmente com a possibilidade de designar números cada vez maiores (à criança interessam principalmente os extremos, os excessos, o muito grande e o muito pequeno, tudo, enfim, que seja motivo para exclamações de surpresa). E é frequente, depois de mencionarem um número que lhes parece enorme, desfecharem a pergunta: 'E agora! Há um número maior do que este?' O adulto poderá, talvez, indicar outros números ainda maiores; mas depois, para pôr termo a um jogo que ameaça eternizar-se, responderá possivelmente:

'Por maior que seja um número, há sempre outro número maior do que esse'[1].

Em crianças receptivas, o efeito desta frase pode ser extraordinário: a criança tentará talvez reproduzi-la, para apreender todo o seu significado e compenetrar-se bem do seu alcance, comentando-a com grandes exclamações. E tem boas razões para isso. Pois não é esse o seu primeiro contacto com a ideia de infinito matemático?

O adulto, muitas vezes, perdeu por completo a faculdade de se admirar seja do que for. Não se apercebe, como a criança, de que tudo à sua volta é motivo de espanto e que há pensamentos inevitáveis que causam vertigens...

Uma criança de 5 anos, que teve assim a revelação do infinito matemático, perturbada com a ideia, tornou à carga, dias depois, com esta observação:

'Já sei! É porque há sempre dias e noites que os números não mais acabam'.

A observação é justíssima. A sucessão dos dias e das noites é talvez o que sugere mais fortemente no nosso espírito, por indução, a ideia da sucessão infinita dos números naturais. Assim, a criança tinha substituído a concepção de inifinito actual pela de infinito potencial — *a do infinito contestável das coisas actuais pela do infinito plausível das que estão por vir.*

---

(1) Em símbolos: $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \exists m \in \mathbb{N}: m > n.$

Há mais de dois mil anos, PLATÃO tinha dito algo de semelhante, em forma poética (no *Diálogo Timeu*):

'O tempo e os céus foram criados no mesmo instante. Deus fez o Sol, para que os seres dotados de inteligência pudessem aprender a aritmética; quer isto dizer que, sem a sucessão dos dias e das noites nós não teríamos pensado nos números. Foi o discernimento dos dias e das noites, dos meses e dos anos, que deu lugar ao conhecimento dos números e à concepção do tempo...'.

Na verdade, a ideia de infinito matemático aparece indissoluvelmente ligada à ideia de tempo ([1]). Em outro passo do mesmo *Diálogo*, Platão diz em resumo o seguinte, na mesma linguagem poética:

'Para dar ao homem uma imagem da Eternidade, o Criador fez essa imagem eterna, mas móvel, na medida em que é traduzível por números; ao passo que a verdadeira Eternidade é una, portanto imutável. É a essa imagem móvel da Eternidade que chamamos Tempo'.

Alguém poderia ter dito àquela criança de 5 anos:

'Os dias e as noites, na Terra, também alguma vez terão fim. Mas em outros astros, em outros planetas, continuará a haver *dias* e *noites*, para ensinar os números a seres inteligentes. E assim sucessivamente.

Até quando? Até onde? Chegados a este ponto, todos somos crianças: acabamos por fazer perguntas, que nem sequer parecem ter sentido.

([1]) O infinito espacial é aparente, como desde logo nos revela a teoria da relatividade, mostrando quanto é ilusória a ideia de simultaneidade a distância: nós vemos as estrelas, não como elas são *actualmente* (porque tal não tem sentido), mas sim como *foram*, algumas delas há milhões de anos.

NOTA SOBRE AS CORRENTES NOMINALISTA E REALISTA. Um dos factos dominantes na história da filosofia medieval foi a controvérsia entre *nominalistas* e *realistas*, que se arrastou durante dois séculos, acerca da existência dos *universais*. Dava-se este nome aos *entes abstractos*, que são independentes do espaço e do tempo, isto é, às *propriedades* (ou *atributos*), bem como às *classes*. Exemplos: a *verdade*, a *beleza*, o *bem*, a *justiça*, a *brancura*, a *esfericidade*, a *humanidade* (ou ainda a *espécie humana*), ou ainda, dum modo geral, os números, as formas, as cores, as classes biológicas, etc.

A posição inicial dos nominalistas pode resumir-se nestes termos:

Não existem a verdade, a beleza, a justiça, a esfericidade, etc.: existem apenas factos verdadeiros, coisas belas, acções justas, corpos esféricos, etc. Um substantivo abstracto é, pois, um *nome* (designação), a que não corresponde nenhum *ente* (designado). E o mesmo se pode dizer dos substantivos comuns, tais como 'rosa', 'gato', 'homem', 'astro', etc.: cada um destes é apenas um *nome*(1), que aplicamos indistintamente a *diversos indivíduos semelhantes entre si*, mas ao qual não corresponde nenhum *ente*, que seja a classe ou o conjunto desses indivíduos.

Pelo contrário, os realistas afirmam a existência dos universais e chegam a atribuir-lhes mais *realidade* do que aos *seres concretos* (ou *seres empíricos*), nos quais se manifestam os universais. Uma das formas extremas do realismo é a *teoria platónica das ideias*, que diz, em resumo, o seguinte:

Para além do mundo sensível, onde tudo é instável e se corrompe, ergue-se a realidade inteligível, o mundo sublime das Ideias, imu-

---

(1) 'Nada mais do que *flatus voci* (um sopro de voz)' teria dito o filósofo escolástico ROSCELINO, fundador do nominalismo (século XI).

tável e eterno, do qual o primeiro é apenas imitação grosseira, imagem deformada, como a de paisagem serena, reflectida na superfície agitada de um rio. Assim, as coisas sensíveis, isto é, os entes que nós conhecemos por meio dos sentidos, são apenas reproduções imperfeitas das Ideias. Estas existem desde sempre na verdadeira Realidade (que é o Céu, donde a nossa alma veio) e os entes materiais apenas contribuem para despertar em nós a recordação das ideias [*teoria platónica das reminiscências*]. Por exemplo, os círculos, tais como nós os desenhamos e materialmente os conhecemos, são apenas imagens toscas da Ideia do Círculo, que conhecemos com os olhos da razão ou seja da alma. Deste modo, o mundo sensível não passa de miragem evanescente, pois que nada aí perdura e consiste.

Como se vê, a palavra 'realismo' é, neste caso, usada em sentido literalmente oposto ao habitual, pois que se refere à realidade inteligível (ou ideal). Ora, na linguagem vulgar, o significado de 'ideal' opõe-se ao de 'real'. Assim, identificar o real com o ideal é uma audácia que choca o senso comum: chama-se hoje, de preferência, '*idealismo*' a esta forma de realismo ([1]).

Na Idade Média, os nominalistas representam a filosofia do Devir, o empirismo heracliteano, ao passo que os realistas representam a filosofia do Ser e em especial o racionalismo platónico. Nominalismo e realismo, empirismo e racionalismo, ser e devir — diálogo que

---

([1]) Como sempre, ao sustentar uma doutrina que choca o senso comum, a linguagem de Platão assume forma poética. Interessa registar que a teoria platónica das duas realidades (a sensível e a inteligível), bem como a teoria das reminiscências, inspirou a Camões um dos seus mais belos poemas, '*Babel e Sião*': Babel é o mundo sensível e Sião o mundo inteligível (ou seja o Céu, de que 'a nossa alma sente saudades').

Modernamente, os cientistas apresentam uma versão biológica da teoria das reminiscências: cada indivíduo recebe no embrião o seu *código genético*, que lhe permite *recordar*, em contacto com a natureza, as experiências e os hábitos mentais, adquiridos em milhões de anos por todos os seus antecessores.

não mais terá fim, enquanto houver história humana, pois que se trata de duas atitudes *complementares* que se alternam no nosso espírito ao perscrutar a natureza. O que interessa é saber conciliar as duas atitudes, conforme a situação, de acordo com o *bom senso,* procurando evitar posições rígidas. Essa filosofia da *conciliação pelo bom senso,* que já tinha sido adoptada por ARISTÓTELES, foi retomada no século XIII por S. TOMÁS DE AQUINO, que pôs, assim, termo à polémica escolástica sobre os universais. Mas, o antagonismo tem vindo a renascer sob as mais diversas formas, até aos tempos actuais...

É impossível sustentar, *em absoluto,* a tese nominalista ou a tese realista, sem cair em paradoxos. Ainda em fins de século passado o realismo das classes, levado ao extremo, conduziu aos célebres *paradoxos da teoria dos conjuntos,* que provocaram o fim trágico da vida de CANTOR, atacado pelos matemáticos empiristas. E não se pode dizer que a questão esteja encerrada.

Por outro lado, segundo a tese nominalista, não existe por exemplo o verde, mas apenas a palavra 'verde' (e coisas verdes); não existe o número 3, mas apenas a designação '3' (e conjuntos de 3 elementos); e assim por diante, negando tudo que seja classe, propriedade ou relação, como coisa que possa existir, além dos seres individuais. Mas, o que são afinal as palavras e os símbolos senão *entes abstractos,* — classes de coisas sensíveis? Consideremos, por exemplo, a *letra* a. O que é este ente, que se designa por 'a', senão uma certa classe de figuras materiais, nem sequer semelhantes entre si no sentido geométrico? É evidente que se trata de uma entidade convencional, com inúmeras modalidades de concretização, sem que seja possível delimitá-la com nitidez perfeita: da letra *a* podemos passar, por *continuidade,* à letra *q,* à letra *d,* etc.; quando dizemos 'este *a,* aquele *a*', fazemos alusão a duas *representações* distintas do *mesmo sinal*: a letra *a* escrita não só em dois *lugares* diversos, mas ainda de dois *modos* necessariamente diversos. E, se passarmos da linguagem escrita para a linguagem falada, a situação é, perfeitamente, análoga.

Aliás, a crítica empirista, para se manter coerente consigo mesma, foi cair, como era inevitável, no *cepticismo,* negando a existência do que quer que seja, concreto ou abstracto, quer no domínio da matéria (BERKELEY) quer no do espírito (HUME).

O bom senso e a experiência dizem-nos afinal que, para podermos pensar e subsistir no mundo em que vivemos, precisamos de *acreditar* nos sentidos, controlados pela razão, e na razão, controlada pelos sentidos, num processo de correcção mútua e constante. Assim, deveremos aceitar como *hipótese eficaz e necessária,* a existência de diversos entes, quer sejam indivíduos, propriedades, classes ou relações (já sabemos, aliás, o que há de relativo em tais conceitos).

Consideremos, por exemplo, a *espécie humana.* É uma classe, um ente abstracto. Mas, como negar inteiramente a sua realidade? Não é um conjunto bem definido, sem dúvida: vem obscuramente do passado e prolonga-se de maneira imprevisível no futuro, sem *fronteiras marcadas.* Mas são assim todos os entes da natureza([1]).

Aliás, é esse carácter indefinido dos entes naturais que gera em nós a ideia de *infinito.* E, todavia, a respeito de tudo o que é obra da natureza, se diz que é *finito,* isto é, que tem *fim...* Mas, por outro lado, também se diz que os entes da natureza se transformam continuamente uns nos outros, que a quantidade se transforma na qualidade, etc.

Assim, os conceitos complementares de *finito* e *infinito,* de *contínuo* e *descontínuo,* etc. são, como quaisquer outros, simplificações mentais sugeridas ao nosso espírito pela própria natureza para a podermos interpretar, e que não podemos por isso evitar, mas que, em cada caso, só imperfeitamente podem ser aplicados — porque a natureza é *infinitamente* complexa...

([1]) Quando se diz, por exemplo, '*Não existem raças humanas*', está-se a adoptar uma atitude nominalista, que equivale a dizer: '*Não existem critérios rígidos* (*ou fronteiras*) *que permitam distinguir raças humanas*'.

13. O problema da não contradição da aritmética. Os trabalhos de CANTOR, FREGE, PEANO, RUSSELL e outros tendiam a reduzir toda a matemática à lógica e à teoria dos conjuntos. Porém, essa tendência (chamada *'logicismo'* em matemática) não conseguiu alcançar o seu objectivo. Daí resultaram novas formas de nominalismo (ou empirismo) em matemática, das quais a mais extremista é talvez o chamado *'intuicionismo'* de BROUWER e a mais moderada o chamado *'formalismo'* de HILBERT(1).

Segundo Hilbert, a matemática, considerada apenas no seu aspecto lógico-dedutivo, é essencialmente uma *linguagem exacta*, para uso da ciência. Cada uma das suas formas (ou, como se diz precisamente, cada um dos seus *formalismos*) é constituído por um sistema de *símbolos* e de *regras de tipo gramatical*, para associar esses símbolos em termos e em proposições aceitáveis como verdadeiras (axiomas, definições e teoremas). Não interessa propriamente à matemática o problema da existência ou não existência de entes aos quais se possam aplicar os termos: basta admitir que existem os símbolos com os quais se trabalha e saber (ou admitir) que as regras para uso dos símbolos, em cada formalismo, não conduzirá nunca a contradição, isto é, a uma proposição *que seja ao mesmo tempo verdadeira e falsa*.

Para compreender melhor este ponto de vista (exposto necessariamente de maneira sumária e imprecisa), consideremos a axiomática dos grupos (U, .) em linguagem multiplicativa:

G1. Para todo o par (a,b) de elementos de U, existe um e um só elemento de U chamado produto de *a* por *b*, que se representa por ab.

---

(1) DAVID HILBERT (1862-1943) é considerado um dos maiores matemáticos da primeira metade deste século, se não o maior. Ver a NOTA HISTÓRICA do Cap. V do *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano.

G2. Existe um elemento de U, que se representa por 1, tal que $a1 = 1a \quad , \quad \forall a \in U$ (1).

G3. $(ab)c = a(bc) \quad , \quad \forall a,b,c \in U$.

G4. Para todo o elemento *a* de U, existe um elemento a^{-1} de U tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Já sabemos que esta axiomática é *compatível*. Juntemos-lhe, agora, o seguinte axioma:

G5. Existe, pelo menos, um elemento *a* de U, distinto de 1, tal que $a^2 = a$.

Será a nova axiomática G1-G5 compatível?

Para ver que não, consideremos um elemento *a* qualquer de U e suponhamos que

$$a^2 = a$$

Então

$$a^{-1} a^2 = a^{-1} a$$

donde $$a = 1$$ *(porquê?)*

Assim, dos axiomas G1-G4 deduz-se a seguinte proposição:

(1) $$a^2 = a \Rightarrow a = 1 \qquad (\forall a \in U)$$

---

(1) Supõe-se U não vazio.

Mas, segundo o axioma G5, é verdadeira a *negação* desta proposição:

$$\exists a \in U: a^2 = a \wedge a \neq 1$$

Por conseguinte, segundo a axiomática G1-G5, *a proposição* (1) *é, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa, o que é inadmissível segundo o* PRINCIPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO.

Pois bem, diz-se que uma axiomática é *contraditória,* sse é possível deduzir dela uma proposição que seja ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Desde logo se vê que:

A) *Se uma axiomática é compatível, não é contraditória.*

Com efeito, dizer que uma axiomática é compatível significa que existe, pelo menos, uma realização ou modelo $\mathfrak{m}$ dessa axiomática. Neste caso, todas as proposições que se deduzem logicamente da axiomática serão *verificadas efectivamente* em $\mathfrak{m}$, isto é, são todas *verdadeiras* e *nenhuma falsa.*

Pela regra de conversão, a proposição A) equivale à seguinte:

A') *Se uma axiomática é contraditória, então é incompatível.*

Por exemplo, a axiomática G1-G4 dos grupos é compatível, logo não contraditória. Por sua vez, a axiomática G1-G5 é contraditória, logo incompatível (isto é, não existe nenhuma realização dessa axiomática).

Resta saber se é verdadeira a recíproca da proposição A):

A*) *Se uma axiomática não é contraditória, então é compatível.*

Pois bem:

Considera-se esta proposição verdadeira, *por definição*. 'Por definição de quê?', pode perguntar-se. A resposta é esta: Por definição de '*existência de uma realização da axiomática*'. HENRI POINCARÉ exprimia este facto dizendo:

'*Existir*, em matemática, significa: *ser isento de contradição*'.

Por exemplo, dizer que *existe o conjunto* $\mathbb{N}$ equivale a dizer que a axiomática de Peano (ou a axiomática A1-A5) é não contraditória; dizer que *existe o espaço euclidiano usual* $\mathcal{E}$ equivale a dizer que é não contraditória qualquer axiomática da geometria euclidiana elementar, etc.

As proposições A) e A*) fundem-se numa única:

Uma axiomática é compatível, sse não é contraditória

Assim, na impossibilidade de construir uma realização da axiomática A1-A5, como se fez para a axiomática dos grupos (que admite *realizações finitas*), somos conduzidos ao seguinte problema:

PROBLEMA DA NÃO CONTRADIÇÃO DA ARITMÉTICA. *Provar que a axiomática de Peano (ou qualquer outra equivalente) é não contraditória.*

Convém desde logo notar que, no enunciado dos teoremas de aritmética, bem como na respectiva dedução, intervêm não só os axiomas e as noções primitivas da aritmética, segundo a referida axiomática, *mas também noções e axiomas da lógica*. Esta observação levou HILBERT a tentar resolver o problema da não contradição da aritmética, partindo de uma axiomática dos números naturais, ampliada com noções primitivas e axiomas da lógica. É claro que, para obter o máximo rigor, foi indispensável formular todos esses axiomas em *linguagem simbólica.* Um tal conjunto de símbolos e de axiomas (que podemos equiparar a *regras gramaticais)* é chamado um *formalismo rigoroso* ou *língua científica.*

Com os seus esforços neste sentido, HILBERT acabou por dar um incremento ao estudo dos fundamentos da matemática; *mas, não conseguiu alcançar o seu objectivo principal, que era o de provar a não contradição da aritmética.*

Este insucesso parcial levou o lógico matemático KURT GÖDEL a demonstrar um teorema memorável, que constitui um marco milenário na história do pensamento científico ([1]). Não podemos formular exactamente o teorema de GÖDEL; mas a sua ideia é esta:

É *impossível demonstrar a não contradição dos formalismos lógico-aritméticos de Hilbert, sem recorrer a uma teoria mais ampla (chamada 'meta-teoria', em relação à primeira), isto é, sem criar um novo formalismo mais rico ('meta-língua' ou 'sintaxe' do primeiro), introduzindo novos símbolos e novos axiomas. Põe-se, portanto, o problema da não contradição deste novo formalismo, o que requer por sua vez um formalismo ainda mais amplo, e assim sucessivamente, sem mais se poder chegar a uma conclusão definitiva.*

Em conclusão:

Procurando racionalizar o *infinito quantitativo* dos números naturais, o matemático acaba por ir de encontro a um outro mais

---

([1]) O nome de GÖDEL encontra-se ligado, juntamente com os de VON NEUMANN e NORBERT WIENER, ao advento da Cibernética. É sabido como a análise lógica e a construção de línguas científicas intervêm nos computadores.

temeroso: o *infinito qualitativo* das linguagens, que se criam e se sucedem de modo imprevisível!

Uma análise aprofundada do assunto mostra que é este o tipo de infinito que intervém no conjunto dos números reais ([1]).

O teorema de Gödel vem, afinal, mostrar o *poder criador do espírito humano* e tem sido invocado como argumento contra os adeptos extremistas da CIBERNÉTICA, que atribuem verdadeira inteligência aos computadores electrónicos e que, vice-versa, equiparam o cérebro humano a um computador evoluído. Assim, o nosso cérebro seria apenas o produto aperfeiçoadíssimo da *evolução biológica*, efectuada em milhões de anos.

Mas há a tese oposta, defendida por outros cientistas, segundo a qual é absurdo atribuir inteligência aos computadores, se 'inteligência' significa: *faculdade de reflectir* perante situações novas; *capacidade de adaptação* a essas novas situações; *liberdade de opção*, segundo critérios pessoais; enfim, *poder criador*, capaz de modificar o mundo e o curso dos acontecimentos.

Na verdade, se as máquinas tivessem inteligência, esta seria terrível — porque seria *inteligência sem consciência*.

NOTAS — I. O ponto de vista do formalismo é nominalista na medida em que considera os símbolos como a realidade em que assenta directamente a matemática. O *problema ontológico*, que consiste em saber se existem ou não seres (indivíduos, classes ou rela-

---

([1]) Segundo investigações posteriores, o resultado negativo de Gödel poderia ser superado mediante uma espécie de *teoria dos tipos lógicos* para os formalismos. Nesta ordem de ideias, haveria não *um*, mas *vários* conjuntos de números reais, sucessivamente mais amplos e cada um dos quais teria a *potência do contínuo* segundo o formalismo correspondente, mas a *potência do numerável* segundo o formalismo seguinte.

ções) aos quais se apliquem os símbolos, é considerado um problema extra-matemática.

II. Dizer que uma axiomática é não contraditória equivale a dizer que é válido o PRINCIPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO na teoria a que dá origem. Nos formalismos de Hilbert são ainda utilizados, como regras de lógica, o PRINCIPIO DA IDENTIDADE e o PRINCIPIO DO TERCEIRO EXCLUIDO. Porém, este último não é aceite pelos *intuicionistas* (ver p. 139).

III. Na linguagem comum são frequentes os casos em que um mesmo termo aparece a designar entes distintos: então o termo diz-se *plurívoco* (ou *ambíguo*) e os entes designados dizem-se *homónimos.* Já no *Compêndio de Matemática,* I vol., 1.º tomo, pp. 20 e 21, se observou que estes casos vão contra os princípios da identidade e da não contradição, podendo originar equívocos. Exemplos:

'Viseu é uma cidade portuguesa. Viseu não é uma cidade portuguesa. Logo Viseu não é Viseu'.

'Ingrid Bergman é uma estrela. Ingrid Bergman não é uma estrela'. Logo há uma estrela que não é estrela'. (Acepções diferentes da palavra 'estrela') ([1]).

Num formalismo rigoroso pode haver termos *sinónimos,* mas não termos *ambíguos:* cada termo só pode designar *um* ente e cada pro-

---

([1]) A imprecisão de linguagem pode prestar-se não só a equívocos, mas também a jogos de palavras, a sofismas, à dialéctica no mau sentido, como a que se emprega por vezes em tribunais e em discursos demagógicos... Assim é que, quando falta bom senso ou a boa fé, se chega a provar que o branco é preto...

posição só pode ter *um* valor lógico (numa determinada realização da axiomática). Por isso, os formalismos rigorosos também se chamam *línguas unívocas* ou *línguas exactas*. A linguagem comum não é evidentemente uma língua exacta (embora possa conter línguas exactas, contraditórias entre si).

Os formalismos rigorosos têm a exactidão inflexível das máquinas de calcular, às quais se aplicam. A linguagem comum não tem a precisão das máquinas; mas, por isso mesmo, oferece outras vantagens, que a tornam imprescindível: a plasticidade, o dinamismo, o *élan* criador; numa palavra — a vida.

ADITAMENTO I

CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

ADVERTÊNCIA PRÉVIA

Só uma parte do que, é exposto neste aditamento ao § 1, Cap. I, deste volume, deverá ser tratada nas aulas. O objectivo essencial destes apontamentos é o de corresponder a solicitações vindas espontaneamente de professores e alunos, no sentido de estabelecer uma coordenação entre os elementos de cálculo numérico aproximado, como vêm expostos no texto-piloto, e as regras práticas que são aplicadas tradicionalmente nos problemas de física em que intervêm multiplicações, divisões, extracções de raiz, etc.

Desde já se deve salientar que, embora úteis dentro de certos limites, as referidas regras não são rigorosas, e que o seu uso indiscriminado pode conduzir, em certos casos, a conclusões pouco satisfatórias, ou porque são demasiado optimistas ou porque são demasiado pessimistas. Uma das razões pelas quais essas regras não são rigorosas é o facto de se basearem nas fórmulas aproximadas dos desvios relativos, que só poderão ser úteis e seguras quando usadas com certo discernimento, baseado não só na teoria, mas também na experiência e no bom senso.

Desde logo nos parece evidente que a aquisição de uma tal experiência ultrapassa a finalidade do ensino liceal. Mas há um mínimo razoável que os alunos deveriam conhecer sobre o assunto. E esse mínimo, em nosso entender, é mais ou menos o que vem exposto nos n.os 2, 3, 4, 5, 6 e 7, mas sem desenvolvimentos teóricos: *bastará conhecer as regras e sabê-las aplicar na prática com critério.* Tudo o mais pode ser recomendado aos alunos como leitura, para melhor esclarecimento do assunto.

Note-se que as duas últimas regras do n.º 5 são apresentadas como facultativas. O que, entre a matéria desse número, consideramos essencial, é a regra prática inicial e a aplicação das fórmulas aproximadas de majoração dos erros relativos.

Os cálculos logarítmicos a que se faz referência nos n.os 5 e 6, e outros análogos, podem eventualmente ser propostos como exercícios aos alunos em qualquer ocasião, com dupla finalidade: treiná-los nessa técnica de cálculo e levá-los a tomar plena consciência da importância dos problemas relativos ao grau de aproximação dos resultados, o que é sempre muito importante.

Quanto às fórmulas rigorosas de majoração dos erros absolutos, que se estudam previamente no texto-piloto, e quanto aos problemas, directos e inversos, que se resolvem com aplicação dessas fórmulas, a sua finalidade é principalmente pedagógica, como introdução heurística e lógica à teoria dos limites, que, por sua vez, é o fundamento rigoroso do cálculo infinitesimal e da análise numérica.

Aproveitamos a oportunidade para deixar aqui expressos os nossos melhores agradecimentos ao Snr. Dr. Alfredo Osório dos Anjos, que pôs amavelmente à nossa disposição todos os elementos em que se baseou para as suas lições no curso de férias de 1967, o que muito facilitou a nossa tarefa, embora este aditamento se afaste sensivelmente da linha tradicional.

CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

1. **O sistema da vírgula flutuante no cálculo elementar, no cálculo logarítmico e no cálculo electrónico.** Normalmente, os dados e os resultados numéricos são apresentados na prática sob a forma decimal, isto é, sob a forma de dízimas finitas. Tal como se aprende na escola primária, a multiplicação com dízimas finitas — impropriamente chamadas *números decimais* ([1]) — é feita em duas fases sucessivas: primeiro, abstrai-se das vírgulas e multiplicam-se os números como se fossem inteiros; depois, coloca-se a vírgula no produto, de acordo com a bem conhecida regra, que se justifica facilmente. Exemplo:

$$
\begin{aligned}
2{,}307 \times 48{,}26 &= (2307 \times 10^{-3}) \times (4826 \times 10^{-2}) \\
&= (2307 \times 4826) \times 10^{-5} \\
&= 11133582 \times 10^{-5} \\
&= 111{,}33582
\end{aligned}
$$

A parte geralmente trabalhosa do cálculo, para a qual se torna útil o emprego de máquinas de calcular, é evidentemente a primeira.

Para a divisão, procede-se de maneira semelhante na essência, embora diversa nos pormenores: começa-se por multiplicar o dividendo e o divisor por potências de 10 convenientes, de modo a obter dois números inteiros tais que o quociente inteiro do primeiro pelo segundo tenha o número de algarismos significativos desejado; depois divide-se o quociente (e eventualmente o resto) pela potência

---

([1]) Por abuso cómodo de linguagem, usaremos também aqui a expressão 'número decimal' ou simplesmente 'número' no sentido de 'dízima finita'.

de 10 que corrige a alteração inicial. Suponhamos, por exemplo, que se trata de achar o quociente e o resto de 1,48 por 3,14 com 3 algarismos exactos[1]. Ora, tem-se:

$$1\ 48 = 148000 \times 10^{-5};\ 3{,}14 = 314 \times 10^{-2};$$

$$\begin{array}{r|l} 148000 & 314 \\ \cline{2-2} 2240 & 471 \\ 420 & \\ 106 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 8 & 4 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

ou seja:

$$148000 = 314 \times 471 + 106,$$

donde, dividindo ambos os membros por 10^5:

$$1{,}48 = 3{,}14 \times 0{,}471 + 0{,}00106$$

Assim, obtêm-se o quociente e o resto pedidos

$$0{,}471 \quad \text{e} \quad 0{,}00106,$$

deslocando a vírgula para a esquerda $5 - 2$ casas no quociente inteiro, 471, e 5 casas no resto, 106.

Geralmente, o resto não interessa nestas divisões: basta conhecer

---

(1) No n.º 2 se dirá, precisamente, o que deve entender-se por 'algarismos significativos' e por 'algarismos exactos'.

o quociente com aproximação até ao último algarismo significativo que se pretende. No exemplo anterior, será:

$$\frac{1,48}{3,14} = 0,471\ldots$$

São conhecidas variantes deste processo, como as que se aprendem na escola primária ([1]).

Assim, dum modo geral, quando se trata de multiplicações ou divisões, a posição da vírgula pode ser alterada conforme as conveniências, fazendo-se depois a devida correcção no resultado. Exprime-se então este facto dizendo que os cálculos são feitos com *vírgula flutuante*.

Note-se que já no cálculo logarítmico e no emprego da régua de cálculo se recorre a tal processo. Assim, no cálculo com logaritmos decimais, tudo se passa como se os números fossem escritos sob a forma do produto de um número do intervalo $[1,10]$ por uma potência de 10; por exemplo:

$$932,58 = 9,3258 \times 10^2$$

$$10,25 = 1,025 \times 10^1$$

$$3,142 = 3,142 \times 10^0$$

$$0,00508 = 5,08 \times 10^{-3}$$

([1]) É de notar o à-vontade com que, entre nós, se impõe a crianças de 7 a 8 anos a aprendizagem de uma técnica que está longe de ser simples, contrariamente ao que possam imaginar as pessoas que se automatizaram há muitos anos nessa técnica. E o método pedagógico dos castigos corporais, ainda hoje usado com frequência no nosso País, para ensinar às crianças esses processos de cálculo, só contribui para levantar barreiras psíquicas insuperáveis e cimentar a já proverbial aversão à matemática.

Então o expoente da potência de 10 que figura no produto é a *característica do logaritmo* do número e o logaritmo do primeiro factor, compreendido entre 1 e 10, é a *mantissa do logaritmo* do número considerado. Nestes exemplos, a vírgula foi deslocada de modo a deixar à esquerda um *só* algarismo significativo, portanto $\geqslant 1$ e $\leqslant 9$; diz-se então que o número (ou, melhor, a dízima) tem a vírgula *normalizada*. Mas, quando se procura a mantissa do logaritmo numa tábua usual, o que se faz na prática é colocar a vírgula (pelo menos mentalmente) de modo a deixar à esquerda exactamente 4 algarismos significativos; assim, os números anteriores são substituídos respectivamente pelos seguintes:

$$9325{,}8 \quad ; \quad 1025$$

$$3142 \quad ; \quad 5080$$

Então, a tábua fornece directamente a mantissa do número representado pelos 4 primeiros algarismos. Quanto aos algarismos seguintes, se os houver, será preciso fazer a correcção correspondente, recorrendo à interpolação pelas *primeiras diferenças* (diferenças tabulares).

Como é sabido, o processo descrito é perfeitamente lícito, uma vez que a mantissa não depende da posição da vírgula, mas apenas dos logaritmos significativos. E a determinação da característica não oferece a mínima dificuldade, segundo a regra usual.

Convém notar que os *computadores electrónicos digitais para cálculo científico,* trabalham normalmente com vírgula flutuante e com um determinado número de algarismos decimais significativos (cerca de nove nos computadores de potência média e de doze nos de grande potência). É necessário, portanto, não perder de vista os erros de *truncatura* ou de *arredondamento* que daqui resultam, visto que, tal como sucede com as tábuas de logaritmos, são omitidos os algarismos significativos que viriam a seguir àqueles que são conservados, em número fixo ([1]).

Não se deve também esquecer o facto de os computadores utilizarem internamente o sistema binário de numeração, exigindo o emprego de mecanismos suplementares para a tradução e a retroversão entre o sistema decimal e o sistema binário.

Seja como for, na utilização de tais computadores, cada número real é representado externamente sob a forma de uma dízima com um número fixo de algarismos significativos, precedido do sinal + ou −, e seguido da indicação de um número inteiro, positivo, negativo ou nulo, que é o expoente da potência de 10 pela qual deve ser multiplicada essa dízima para dar um valor, geralmente aproximado, do número em questão. O referido número inteiro (expoente), também não pode ir além de certo limite (dois algarismos significativos, em computadores de potência média). Mas esta e outras limitações poderão ser rodeadas, em caso de necessidade, por meio de artifícios mais ou menos laboriosos.

Para separar a dízima inicial da indicação do domínio inteiro, que é o expoente da potência de 10 pela qual a primeira deve ser multiplicada, adopta-se um determinado sinal.

Finalmente, é preciso notar que, *em países de língua inglesa,* se usa o ponto com o significado entre nós atribuído à vírgula e vice-versa, na representação decimal de números.

Por exemplo, em tais países, as expressões

0.54; 3.1416; 3,405,243.28

([1]) Há, no entanto, computadores (para cálculo comercial) que trabalham no sistema de vírgula fixa.

significam, respectivamente, o mesmo que entre nós, as expressões

$$0{,}54; \quad 3{,}1416; \quad 3.405.243{,}28$$

Seguem-se alguns exemplos de números tais como se apresentam em dados ou resultados de cálculos com os referidos computadores:

$$3.14159265 \ \odot + 00 = 3{,}14159265$$

$$0.314159265 \odot + 05 = 31415{,}9265$$

$$2.718281828 \odot - 03 = 0{,}0027182818$$

$$-\, 0.314159265 \odot - 25 = -\, 3{,}14159265 \times 10^{-26}$$

Os dois círculos concêntricos são uma imitação do sinal separador usado em certas marcas de computadores.

2. Algarismos significativos e algarismos exactos. Chama-se *algarismo significativo* duma dízima todo o algarismo dessa dízima que é diferente de 0 ou tem à sua esquerda, pelo menos, um algarismo diferente de zero. Os algarismos significativos duma dízima finita formam uma sequência, atendendo à ordem natural por que se apresentam. Por exemplo, a sequência dos alagrismos significativos de 0,0053020 é (5, 3, 0, 2, 0), a sequência dos algarismos significativos de 350 é (3, 5, 0), etc.

Para introduzir a noção de 'algarismo exacto', começaremos por um exemplo. Suponhamos que 5,382 é valor aproximado de outro número α, com erro inferior a 0,01; quer isto dizer que α está entre $5{,}382 - 0{,}01$ e $5{,}382 + 0{,}01$, isto é, que

$$5{,}372 < \alpha < 5{,}392$$

Podemos daqui concluir que 5 e 3 são os dois primeiros algarismos significativos da dízima finita ou infinita (normal) que representa α, e podemos exprimir este facto escrevendo:

$$\alpha = 5,3 \ldots$$

Quanto ao terceiro algarismo da dízima representativa de α, o máximo que podemos dizer é que pode ser 7, 8 ou 9. Será portanto natural dizer, neste caso, que os dois primeiros algarismos de 5,382, como valor aproximado de α, são *exactos*. Quanto ao terceiro algarismo, podemos dizer também que ele é exacto, se adoptarmos a seguinte

DEFINIÇÃO. Diz-se que um dado valor aproximado x_1 de um número x tem *n algarismos exactos,* sse o erro absoluto, $|x_1 - x|$, é inferior a uma unidade decimal do n-ésimo algarismo significativo de x_1.

Por outro lado, diremos que um algarismo exacto de um valor aproximado é *estritamente exacto,* sse coincide com o algarismo correspondente do valor exacto (1). Assim, no exemplo anterior, os dois primeiros algarismos do valor aproximado 5,382 são estritamente exactos.

Adoptaremos daqui por diante esta terminologia, que é cómoda na prática e evita confusões.

Vejamos outro exemplo. Sabe-se que a população de certo país é de cerca de 38 630 000 habitantes, com erro inferior a 90 000 habitantes. Como $90\,000 < 100\,000$, o erro absoluto, neste caso, é inferior à unidade decimal do 3.º algarismo significativo, 6, do valor

---

(1) Isto é, com o algarismo correspondente da dízima finita ou infinita (normal) que representa o valor exacto.

dado. Este valor tem, pois, 3 algarismos exactos. Mas o valor exacto, x, da população está compreendido entre 38 630 000 − 90 000 e 38 630 000 + 90 000, isto é:

$$38\,540\,000 < x < 38\,720\,000$$

Isto mostra que os 2 primeiros algarismos do valor dado são *estritamente exactos*.

Outros exemplos ainda:

Quando um aluno é classificado com 9,7 numa prova e aparece na pauta com a classificação de 10, os dois algarismos deste valor são exactos, mas nenhum é estritamente exacto. Pelo contrário, o valor aproximado 9 de 9,7 tem um algarismo estritamente exacto, mas esse valor é *menos próximo* do valor exacto.

Quando se diz que a distância de Lisboa ao Porto, pela melhor estrada é de 321 km, quantos algarismos exactos terá este valor?

Na frase 'Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil em 1500', todos os algarismos são estritamente exactos.

Da definição resultam imediatamente os dois seguintes factos:

I. *Quando se diz que um valor aproximado tem* n *algarismos exactos, tal não impede que esse valor possa ter mais de* n *algarismos exactos*. Assim, no exemplo anterior relativo à população dum país não é impossível que o valor dado tenha 4 algarismos exactos (embora isto seja *pouco aprovável*, se apenas se sabe o que é dito no enunciado).

II. *A sequência dos algarismos exactos de um valor aproximado não depende da posição da vírgula (isto é, não muda quando se multiplicam o valor aproximado e o valor exacto pela mesma potência* *de* 10 *de expoente inteiro, positivo ou negativo). E o mesmo quanto a algarismos estritamente exactos.*

Muitas vezes, os algarismos dum valor aproximado que vêm a seguir aos algarismos exactos não têm interesse. Nesse caso, podem ser substituídos por 0 ou simplesmente omitidos, se estão à direita da vírgula. Tornando ao exemplo da população de um país, bastaria dizer que a população é de cerca de 38 600 000 habitantes.

Para indicar medidas das grandezas, em física, é costume escrever apenas os algarismos que são considerados como exactos, e não omitir o zero, se este é, porventura, o último desses algarismos.

Assim, por exemplo, quando se escreve, a respeito de um comprimento *a* ou de uma pressão p,

$$a = 3{,}5 \text{ m} \quad , \quad p = 5{,}28 \text{ kg/cm}^2,$$

pretende-se indicar que todos os algarismos escritos são considerados como exactos, isto é, que o erro da aproximação é inferior a 1 cm, no primeiro caso, e a 10 g/cm², no segundo caso. É claro que, nestas convenções, o sinal = perde o significado habitual. Quando, porventura, o último algarismo conservado não é exacto, convém indicar um majorante do erro.

A indicação de algarismos supérfluos pode tornar-se ridícula. É o que sucede por exemplo quando, ao fazer o cálculo da altura de uma torre por trigonometria, se apresenta o resultado

$$h = 23{,}450238 \text{ m};$$

é quase certo que, neste caso, os quatro últimos algarismos não são exactos, nem sequer têm qualquer significado físico.

Nos exemplos anteriores, não se diz se os valores são aproximados por excesso ou por defeito. Mas convém ter presente os seguintes factos:

1) *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *a menos de* δ, *então* $x_1 - \delta$ *e* $x_1 + \delta$ *são valores aproximados de* x, *respectivamente por defeito e por excesso, ambos com erro inferior a* 2 δ.

2) *Se* x_1 *é valor aproximado de* x, *por defeito, com erro inferior a* δ, *então* $x_1 + \frac{\delta}{2}$ *é valor aproximado de* x *com erro inferior (ou igual) a* $\delta/2$.

NOTAS SOBRE A TERMINOLOGIA:

I. É corrente chamar 'erro' àquilo a que, nestas lições, chamamos 'desvio'. A distinção que fazemos aqui entre 'erro' e 'desvio' é conveniente para comodidade e clareza de exposição.

II. É preciso não confundir *erros de cálculo* com *erros de observação*. Estes últimos são os erros que se cometem na medição de grandezas. A *teoria dos erros de observação* (também chamada, simplesmente, 'teoria dos erros') é subordinada ao *cálculo das probabilidades* e sai inteiramente do âmbito deste programa.

3. **Arredondamento de valores numéricos.** Pode acontecer que se conheça um valor aproximado de um número α com determinado número *n* de algarismos exactos, mas que seja suficiente, para certos fins, utilizar um valor aproximado de α com um número de algarismos exactos inferior a *n*. Por exemplo, são hoje conhecidos valores aproximados de π com milhares de algarismos exactos, mas,

na prática, não é preciso geralmente ir além de cinco algarismos exactos; muitas vezes, bastam três ou até menos. Em tais casos, o que se faz é uma *truncatura* do valor aproximado, desprezando os algarismos exactos posteriores aos que são necessários (ou substituindo-os por 0, se estão à esquerda da vírgula) e fazendo o *arredondamento usual*, no caso em que o primeiro algarismo desprezado é igual ou superior a 5, isto é, adicionando nesse caso, ao valor considerado, uma unidade decimal da ordem do último algarismo conservado.

Por exemplo, o valor aproximado de π

$$3{,}1416$$

é um arredondamento do valor 3,14159, que, como é sabido, tem seis algarismos estritamente exactos. Analogamente, o valor aproximado de π arredondado com quatro algarismos exactos é 3,142.

Este processo de arredondamento é também usado, sempre que possível, na medição das grandezas. É claro que, neste caso, o valor fica aproximado a menos de *meia unidade decimal* da ordem do último algarismo registado (por defeito ou por excesso).

O mesmo processo é ainda usado nas classificações de alunos. Quando, p. ex., se diz que a média das classiifcações dum aluno em dado exame foi 10, pretende-se apenas dizer, abreviadamente, que essa média é um número x tal que $9{,}5 \leqslant x < 10{,}5$; então 10 é um valor aproximado de x com erro inferior (ou igual) a 0,5 — e não se diz então se é aproximado por defeito ou por excesso.

4. **Erro relativo e número de algarismos exactos.** Recordemos que, sendo x_1 um valor aproximado de um número x, se chama *desvio relativo* de x_1 ao quociente $\Delta x/x$ do *desvio absoluto*

$\Delta x\,(=x_1-x)$ pelo valor exacto x. Convencionámos representar por $\Delta' x$ o desvio relativo (de x_1 em relação a x). O erro relativo de x_1 é, por definição, $|\Delta' x|$ (1).

O erro relativo que, muitas vezes, se exprime em percentagens, dá uma ideia precisa do *grau de aproximação:* este será tanto maior quanto menor for o erro relativo; além disso, dois valores aproximados têm o mesmo grau de aproximação, se têm erros relativos iguais.

Aliás, o erro relativo está relacionado, como veremos, com o número de algarismos exactos.

O erro relativo não depende da posição da vírgula; mais ainda: não muda quando se multiplicam o valor aproximado x_1 e o valor exacto x, por um mesmo número k (positivo), qualquer que ele seja. Tem-se, com efeito:

$$\frac{|kx_1 - kx|}{kx} = \frac{|x_1 - x|}{x}$$

Para ver como o erro relativo está relacionado com o número de algarismos exactos, convém começar por um exemplo. Suponhamos que 2,345 é valor aproximado dum número α com *três* algarismos exactos; quer isto dizer que o erro absoluto é inferior a 0,01, isto é, que

$$|\Delta\alpha| = |2{,}345 - \alpha| < 0{,}01$$

Como, neste caso, $\alpha > 2{,}345 - 0{,}01 = 2{,}335 > 2$, conclui-se que

$$\frac{|\Delta\alpha|}{\alpha} < \frac{0{,}01}{2} = \frac{1}{200}$$

---

(1) Nestas considerações, subentende-se que o valor exacto x e o valor aproximado x_1 são sempre números positivos, o que é suficiente para as aplicações.

Dum modo geral, tem-se a seguinte regra:

TEOREMA 1. *Se* x_1 *é valor aproximado de* x *com* n *algarismos exactos, sendo o primeiro estritamente exacto* [1], *e se este primeiro algarismo é* a, *então o erro relativo de* x_1 *é inferior a*

$$\frac{1}{a \times 10^{n-1}}$$

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese. Como o primeiro algarismo significativo de x_1 é estritamente exacto, o primeiro algarismo significativo de x coincide com esse e é da mesma ordem decimal. Então, existe um inteiro p, positivo, negativo ou nulo, tal que os números $y_1 = x_1 \times 10^p$ e $y = x \times 10^p$ têm precisamente *n* algarismos na parte inteira. Como o primeiro algarismo de y é também *a*, tem-se:

$$(1) \qquad y \geqslant a \times 10^{n-1}$$

Por outro lado, y_1 é um valor aproximado de y com *n* algarismos exactos. Portanto

$$(2) \qquad |y_1 - y| < 1$$

---

(1) Pode acontecer que x_1 tenha *n* algarismos exactos e que o primeiro não seja estritamente exacto. Mas, se $n > 1$, isto *só* pode acontecer em dois casos excepcionais: *a*) quando os *n* primeiros algarismos significativos de x_1 são todos iguais a 9; *b*) quando o primeiro algarismo significativo de x_1 é 1 e os $n-1$ seguintes são zeros. No 1.º caso, um majorante de erro relativo será $1/(9 \times 10^{n-1})$. No 2.º caso, o erro relativo será, quando muito, ligeiramente superior a $1/10^n$, mas o excesso é então *insignificante*.

Portanto, *na prática*, pode dispensar-se a restrição de o primeiro algarismo significativo de x_1 ser estritamente exacto.

Assim, atendendo a (1) e a (2), o erro relativo de x_1 será:

$$\frac{|x_1 - x|}{x} = \frac{|y_1 - y|}{y} < \frac{1}{a \times 10^{n-1}}$$

q. e. d.

O *problema inverso* consiste em achar um número de algarismos exactos a partir de um majorante do erro relativo. Esse problema pode ser sempre resolvido, começando por calcular um majorante do erro absoluto, a partir do majorante do erro relativo.

Por definição, tem-se:

$$|\Delta' x| = \frac{|\Delta x|}{x} \qquad \text{donde} \qquad |\Delta x| \leqslant x\,|\Delta' x|$$

Então, se for ε um majorante de $|\Delta' x|$ e $\hat{x}$ um majorante de x, virá:

$$(3) \qquad \boxed{|\Delta x| \leqslant \hat{x}\,\varepsilon}$$

É fácil calcular um majorante de valor exacto x, a partir do valor aproximado x_1 e do majorante ε do erro relativo ([1]). Todavia, na prática, é geralmente conhecido *a priori* um majorante de x; aliás, nos casos mais frequentes, *o primeiro algarismo significativo do valor aproximado*

([1]) Suponhamos $\varepsilon < 1$ como normalmente sucede. Então, se $x_1 \leqslant x$, tem-se $(x - x_1)/x < \varepsilon$, donde $x - x_1 < x\varepsilon$ e, portanto, $x < x_1/(1-\varepsilon)$. Se $x_1 > x$, esta fórmula também é válida, visto que $1 - \varepsilon < 1$ e, portanto, $x_1/(1-\varepsilon) > x$. A fórmula pode pois ser usada em qualquer caso, com $\varepsilon < 1$ (mas só excepcionalmente, quando não se conhece *a priori* um majorante de x).

é estritamente exacto. Para comodidade, vamos admitir, desde já, que esta condição se verifica nos exemplos seguintes.

I. Sabe-se que 1,628 é valor aproximado de certo número x com erro relativo inferior a 0,005 (0,5 % ou 5 ‰). Calcular um majorante do erro absoluto.

Sendo o primeiro algarismo de 1,628 estritamente exacto, tem-se $x < 2$. Então virá, aplicando (3):

$$|\Delta x| < 2 \times 0{,}005 = 0{,}01$$

Portanto, o valor dado tem *três algarismos exactos*. Mais ainda, vê-se que x está entre 1,618 e 1,638; portanto, o valor dado tem *dois algarismos estritamente exactos*.

II. Sabe-se que a população de certo país é de cerca de 38 630 000 habitantes, com erro relativo inferior a 0,003. Calcular um majorante do erro absoluto deste valor.

Designando por x o número exacto de habitantes do país, tem-se:

$$|x| < 4 \times 10^7 \quad , \quad |\Delta' x| < 0{,}003,$$

donde:

$$|\Delta x| < 4 \times 10^7 \times 0{,}003 = 1{,}2 \times 10^5 < 10^6$$

Neste caso, apenas se pode dizer que o valor dado tem *dois algarismos exactos*. Mas, como o valor exacto está compreendido entre 38 510 000 e 38 750 000, vê-se que os *dois primeiros algarismos são estritamente exactos*.

Para achar directamente um número de algarismos exactos, a partir de um majorante do erro relativo, pode usar-se na prática a seguinte regra:

TEOREMA 2. *Seja* x_1 *um valor aproximado de* x *com erro relativo inferior a*

$$\frac{1}{b \times 10^n} \textit{ (sendo } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ e } b \textit{ natural menor que } 10\textit{)}$$

e seja a *o primeiro algarismo significativo de* x. *Então, se* $a < b$, *o valor* x_1 *tem* $n+1$ *algarismos exactos. Mas, se* $a \geqslant b$, *só podemos garantir que esse valor tem* $n-1$ *algarismos exactos.*

Demonstração:*

Suponhamos verificada a hipótese. Então $\dfrac{|x-x_1|}{x} < \dfrac{1}{b \times 10^n}$

ou seja:

$$|x - x_1| < \frac{x}{b \times 10^n} \tag{4}$$

Como o erro relativo e o número de algarismos exactos não dependem da posição da vírgula, podemos supor desde já, sem quebra de generalidade, que x tem precisamente $n+1$ algarismos na parte inteira. Então, se $a < b$, tem-se:

$$x < b \times 10^n,$$

donde, por substituição em (4):

$$|x - x_1| < 1,$$

o que mostra que, neste caso, x_1 tem n+1 algarismos exactos. Se $a \geqslant b$, tem-se:

$$x < b \times 10^{n-1}$$

e, por substituição em (2), vem:

$$|x - x_1| < 10,$$

o que mostra que, neste caso, x_1 tem *n* algarismos exactos.

Como exercício, pode aplicar-se este teorema aos dois exemplos anteriores, notando que

$$0{,}005 = \frac{1}{200} \quad \text{e} \quad 0{,}003 < \frac{1}{300}$$

As conclusões coincidem com as já obtidas, quanto a número de algarismos exactos.

5. **Avaliação do erro do resultado de multiplicações e divisões sucessivas.** Consideremos, por exemplo, a expressão numérica

$$\frac{3{,}27^2 \times 43{,}08}{0{,}258^3 \times 5{,}327^2}$$

e suponhamos que os dados numéricos são valores aproximados em que todos os algarismos escritos são exactos. Como avaliar o número de algarismos exactos do valor numérico desta expressão?

Um método seguro, que se pode sempre seguir, é o *método directo,* que consiste, neste caso, em calcular os valores das expressões

$$\frac{3{,}26^2 \times 43{,}07}{0{,}259^3 \times 5{,}328^2} \, , \quad \frac{3{,}28^2 \times 43{,}09}{0{,}257^3 \times 5{,}326^2}$$

Estes são, com certeza, valores aproximados por defeito e por excesso do valor exacto, uma vez que os dados têm todos os algarismos exactos. O cálculo dos valores destas expressões por meio de logaritmos não se torna muito laborioso, desde que se tenha o cuidado de achar sucessivamente os logaritmos de 3,26 e 3,28, de 43,07 e 43,09, etc.

Um outro método consiste em calcular, por um lado, o valor da expressão dada e, por outro lado, um majorante do erro relativo desse valor. Da fórmula do desvio do produto

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

deduz-se imediatamente, dividindo por xy, a *fórmula rigorosa do desvio relativo do produto:*

$$\Delta'(xy) = \Delta' x + \Delta' y + \Delta' x \cdot \Delta' y$$

Desta, por sua vez, deduz-se a *fórmula rigorosa de majoração do erro relativo do produto:*

$$(1) \qquad |\Delta'(xy)| \leqslant |\Delta' x| + |\Delta' y| + |\Delta' x| \cdot |\Delta' y|$$

Por outro lado, da fórmula do desvio do quociente, é fácil deduzir a *fórmula rigorosa de majoração do erro relativo do valor inverso:*

$$(2) \qquad \left| \Delta' \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{\bar{x}} \qquad (\Delta x = x_1 - x),$$

em que $\bar{x}$ é um *minorante de* x_1.

Note-se que o *majorante de* $|\Delta' x|$ *dado pelo teorema* 1 *do número anterior coincide geralmente com um majorante de* $\left| \Delta' \frac{1}{x} \right|$ *dado por esta fórmula.*

A aplicação repetida das fórmulas (1) e (2) permite achar, com inteira segurança, um majorante do erro relativo do resultado, em casos como o anterior.

Porém, na prática, usam-se de preferência as fórmulas aproximadas dos desvios, por serem mais cómodas.

Querendo ter uma primeira ideia, *a priori,* do grau de aproximação do resultado, antes de o calcular, pode também usar-se a seguinte

REGRA PRÁTICA. *Quando, numa expressão numérica, intervêm apenas multiplicações e divisões, o grau de aproximação do resultado é geralmente inferior ao dos dados. Nos casos mais frequentes, se for* n *o número total de factores em numerador e em denominador e* ε *um majorante dos erros relativos desses dados, será* $n\varepsilon$ *um majorante do erro relativo do resultado. Nesta contagem não se atende aos dados que, porventura, sejam valores exactos.*

No exemplo anterior tem-se $n = 8$ e podemos tomar $\varepsilon = 1/200$, o que conduz ao seguinte majorante do erro relativo do resultado:

$$8 \times \frac{1}{200} = 0{,}04 = 4\,\%$$

A regra pode ser usada, com relativa segurança, quando $n < 10$ e $\varepsilon < 0{,}01$. Para maiores valores de n, requerem-se *menores* valores de ε. A razão é simples: a regra baseia-se nas *fórmulas aproximadas dos desvios relativos do produto e do quociente.*

$$(3) \qquad \Delta'(x_1 x_2 \cdots x_n) \approx \Delta' x_1 + \Delta' x_2 + \cdots + \Delta' x_n \ (^1)$$

$$(4) \qquad \Delta' \frac{x}{y} \approx \Delta' x - \Delta' y$$

Ora, é óbvio que a aplicação destas fórmulas exige precauções. Se $n < 10$, verifica-se, recorrendo às fórmulas rigorosas, que podemos aplicar, com relativa confiança, a fórmula

$$(5) \qquad |\Delta'(x_1 x_2 \cdots x_n)| \lesssim |\Delta' x_1| + |\Delta' x_2| + \cdots + |\Delta' x_n|,$$

que se deduz de (1). Por outro lado, a fórmula

$$(6) \qquad \left|\Delta' \frac{x}{y}\right| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y|,$$

é já satisfatória na prática, quando os erros relativos dos dados, são inferiores a 0,1: *na pior das hipóteses,* o primeiro membro de (6) será então ligeiramente superior ao segundo, mas o excesso é insignificante na prática (²).

(¹) É claro que, neste caso, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representam *valores exactos.* Valores aproximados de $x_1, x_2, \ldots,$ podem representar-se então, por ex., por $x_{11}, x_{21}, \ldots$

(²) Aliás, convém não esquecer o que se disse atrás a propósito da fórmula (2), que permite, na prática, reduzir a majoração do erro de um quociente à do erro do produto.

As fórmulas (5) e (6) associadas justificam a REGRA PRÁTICA nos casos correntes.

Aplicando directamente estas fórmulas ao exemplo inicial, juntamente com o teorema 1 do número anterior, obtém-se o seguinte majorante do erro relativo:

$$\frac{2}{300} + \frac{1}{4000} + \frac{3}{200} + \frac{2}{5000} <$$

$$< 0{,}007 + 0{,}00025 + 0{,}015 + 0{,}0004 < 2{,}3\,\%$$

Como se vê, esta majoração é bastante melhor do que a primeira (4 %). É claro que os factores 43,08 e 5,327 influem pouco no erro relativo do resultado (menos de 0,1 %), porque têm *quatro* algarismos exactos, enquanto os outros têm *três*.

Dum modo geral, podemos dizer o seguinte:

Quando algum dos factores, em numerador ou denominador, tiver um grau de aproximação bastante superior ao de outro, pode na prática, ser considerado como exacto e, portanto, omitido na avaliação do erro.

Para avaliar o número de algarismos exactos de um produto de *dois* números ou de um quociente, podem usar-se na prática as seguintes regras, que indicamos a *título facultativo,* sem demonstração:

REGRA DO PRODUTO. *Se dois valores aproximados têm* n *algarismos exactos, podemos dizer que o seu produto tem* n−1 *algarismos exactos nos seguintes casos:*

1) *o primeiro algarismo significativo de ambos os factores é diferente de* 1;

2) *o primeiro algarismo significativo de ambos os factores é* 1;

3) *o primeiro algarismo significativo de um dos factores é* 1 *e o primeiro algarismo significativo do produto é menor que* 5.

Quando não se verifica nenhuma destas condições, só podemos dizer que o produto tem n−2 *algarismos exactos.*

REGRA DO QUOCIENTE. *Se dois valores aproximados têm* n *algarismos exactos, o quociente de um pelo outro tem* n−1 *algarismos exactos nos seguintes casos:*

1) *o primeiro algarismo significativo de ambos os termos é diferente de* 1;

2) *o primeiro algarismo significativo de um dos termos ou de ambos é* 1, *e o primeiro algarismo significativo do quociente é menor que* 5.

Fora disto, só podemos dizer que o quociente tem n−2 *algarismos exactos.*

Note-se bem: Estas regras não são rigorosas, porque se baseiam nas fórmulas aproximadas dos desvios relativos do produto e do quociente. Não se pode, portanto, dar propriamente uma demonstração das ditas regras, mas apenas uma *justificação,* de carácter teórico-prático.

Em caso de dúvida, quando seja necessária *uma certeza absoluta,* pode-se sempre recorrer às fórmulas rigorosas de majoração.

Note-se ainda que, *se tivéssemos aplicado estas regras sucessivamente ao exemplo inicial, não poderíamos garantir a existência de um único algarismo exacto. Isto mostra bem o cuidado que é preciso ter na escolha e na aplicação das regras em cálculo numérico.*

6. **Caso da potência.** A majoração do erro relativo da potência é um caso particular da do erro relativo do produto, como se viu aliás concretamente no exemplo anterior. Neste caso, tem-se a fórmula aproximada

$$\Delta'(x^n) \approx n\Delta'x,$$

que exige precauções semelhantes às que foram indicadas para o produto.

Suponhamos, por exemplo, que se trata de calcular π^{10}, utilizando o valor aproximado 3,141 de π. Este, como é sabido, é um valor aproximado *por defeito,* com erro relativo inferior a 1/3000. Neste caso, a fórmula aproximada pode ser usada com segurança e fornece o seguinte majorante do erro relativo da potência:

$$10 \times \frac{1}{3000} = \frac{1}{300}$$

Façamos, agora, o cálculo por logaritmos:

$$\log 3{,}141 = 0{,}49707 \quad , \quad \log 3{,}142 = 0{,}49721$$

$$10 \times \log 3{,}141 = 4{,}9707$$

$$10 \times \log 3{,}142 = 4{,}9721$$

donde:

$$3{,}141^{10} \approx 93470 \quad \text{(por defeito)}$$

$$3{,}142^{10} \approx 93780 \quad \text{(por excesso)}$$

Daqui se conclui que 93470, como valor aproximado de π^{10} tem *dois algarismos estritamente exactos* (não é provável que o terceiro seja exacto). À mesma conclusão se podia chegar, efectuando só metade dos cálculos e utilizando o majorante 1/300 do erro relativo, que fornece o majorante 400 do erro absoluto (o teorema 2 do n.º 4 apenas nos permitia garantir que o valor considerado tem dois algarismos exactos).

7. **Caso da raiz.** A fórmula aproximada do desvio da raiz

$$\Delta' \sqrt[n]{x} \approx \frac{1}{n} \Delta' x$$

pode ser usada com relativa segurança nos casos correntes da prática e mostra, desde logo, que *a radiciação tem a particularidade notável de aumentar o grau de aproximação.*

Suponhamos que se trata de calcular $\sqrt[10]{100\pi}$, utilizando o valor aproximado 314,1 de 100π (valor arpoximado por defeito, com erro relativo inferior a 1/3000). Neste caso, obtém-se o seguinte majorante do erro relativo da raiz:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3000} = \frac{1}{30000}$$

Façamos o cálculo por logaritmos. Temos, agora:

$$\log 314{,}1 = 2{,}49707 \quad , \quad \log 314{,}2 = 2{,}49721$$

$$\frac{1}{10} \log 314{,}1 = 0{,}24970$$

$$\frac{1}{10}\log 314{,}2 = 0{,}24972$$

donde:

$$\sqrt[10]{314{,}1} \approx 1{,}777 \quad \text{(por defeito)}$$

$$\sqrt[10]{314{,}2} \approx 1{,}778 \quad \text{(por excesso)}$$

Por aqui se vê já que 1,777, como valor aproximado de $\sqrt[10]{100\pi}$, tem *quatro* algarismos exactos. Mas, aplicando o teorema 2, com o majorante 1/30000 do erro relativo, vê-se que o valor de $\sqrt[10]{314{,}1}$ tem, pelo menos, *cinco* algarismos exactos, como valor aproximado de $\sqrt[10]{100\pi}$. O quinto algarismo exacto, calculado por interpolação (que merece confiança neste caso), é 0 e, assim, podemos escrever, segundo a convenção adoptada em física

$$\sqrt[10]{100\pi} = 1{,}7770$$

É de admitir que estes algarismos sejam estritamente exactos.

8. **Caso da adição e da subtracção.** É fácil calcular um bom majorante do erro absoluto de uma soma algébrica de valores aproximados e avaliar assim o número de algarismos exactos do resultado. Mas, desde já, se deve notar que a subtracção é, de todas as operações elementares, a que mais pode diminuir o grau de aproximação. Isto torna-se evidente, sobretudo quando o aditivo e o subtractivo são números muito próximos. Seja, por exemplo, a expressão com valores aproximados

$$(2{,}31 - 2{,}27) \times 0{,}730$$

e suponhamos que todos os algarismos indicados são exactos. A diferença 2,31 − 2,27 dá-nos o valor aproximado 0,04 a menos de 0,02. Deste modo, nem sequer *um* algarismo exacto podemos garantir na diferença e, portanto, no produto indicado.

Uma situação semelhante a esta pode surgir na prática, quando, por exemplo, se trata de calcular a altura h de uma torre por meio da fórmula

$$h = \frac{d \ \mathrm{tg}\alpha \ \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}$$

Se a diferença entre α e β for relativamente pequena, será preciso medir estes ângulos com uma grande precisão, para obter um valor de h com aproximação razoável.

Situações deste género são frequentes em cálculos astronómicos ou geodésicos.

Convém ainda notar o seguinte:

Quando, numa soma algébrica, um dos termos tem valor menor que o erro absoluto de outro termo, o primeiro pode, em muitos casos, ser desprezado.

Vejamos um exemplo:

Sabe-se que a população de uma cidade, em dado momento, é de cerca de 850 000 habitantes (com dois algarismos exactos) e que, em seguida, teve um acréscimo de cerca de 3 800 habitantes. Podemos, então, continuar a dizer que a população da cidade é de cerca de 850 000 habitantes (provavelmente ainda com dois algarismos exactos). Mas, se depois deste acréscimo houver um outro de cerca de 8 200 habitantes, então já será mais correcto dizer que a população da cidade passou a ser de cerca de 860 000 habitantes.

ADITAMENTO II

NOVA ORIENTAÇÃO NO ESTUDO DO CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS

1. Imediatamente após o estudo do cálculo aproximado da soma e da diferença, deverá passar-se ao estudo dos conceitos de *erro relativo, algarismos exactos* e *algarismos estritamente exactos,* bem como das regras que relacionam esses conceitos, sem obrigatoriedade de demonstrações. Em seguida far-se-á a dedução da FÓRMULA DO DESVIO DO PRODUTO:

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y,$$

da qual resulta imediatamente, dividindo por xy, a FÓRMULA DO DESVIO RELATIVO DO PRODUTO:

$$\Delta'(xy) = \Delta'x + \Delta'y + \Delta'x \, . \, \Delta'y \qquad (\text{com } xy \neq 0)$$

Posto isto, pode-se abordar o estudo de problemas respeitantes a erros relativos de produtos (1).

---

(1) A fórmula (6) apresentada na pág. 30 deixa agora de ser necessária, segundo a nova orientação. Mas convirá, quando seja oportuno, definir «majorante» e «minorante» dum número.

PROBLEMA DIRECTO. Da fórmula anterior deduz-se imediatamente a *fórmula de majoração do erro relativo do produto:*

$$(1) \qquad |\Delta'(xy)| \leqslant |\Delta'x| + |\Delta'y| + |\Delta'x| \, . \, |\Delta'y|$$

Sejam, por exemplo, 3,28 e 0,423 valores aproximados de dois números x e y, com erros relativos inferiores respectivamente a 3% e a 2%. Então

$$|\Delta'x| = 0{,}03 \qquad \text{e} \qquad |\Delta'y| = 0{,}02,$$

donde, aplicando (1):

$$|\Delta'(xy)| < 0{,}0506.$$

Na prática, poderemos escrever

$$|\Delta'(xy)| \lesssim 0{,}05,$$

em que o sinal $\lesssim$ se lê «menor ou aproximadamente igual a». O *mais provável* é que seja mesmo

$$|\Delta'(xy)| < 0{,}05;$$

se isto não se der, a diferença entre $|\Delta'(xy)|$ e 0,05 será inferior a 0,0006, portanto *desprezável na prática*.

Dum modo geral ter-se-á, na prática:

$$|\Delta'(xy)| \lesssim |\Delta'x| + |\Delta'y|$$

Se atendermos aos sinais e não apenas aos módulos, teremos então a *fórmula aproximada do desvio relativo do produto*

$$\Delta'(xy) \approx \Delta'x + \Delta'y,$$

em que se despreza o termo $\Delta'x \cdot \Delta'y$, cujo módulo é geralmente muito pequeno em relação ao de $\Delta'x + \Delta'y$.

Nas mesmas circunstâncias, pode usar-se também a *fórmula aproximada do desvio (absoluto) do produto*

$$\Delta(xy) \approx x\Delta y + y\Delta x,$$

que prepara psicologicamente o aluno para, mais tarde, *ver intuitivamente* as fórmulas da *derivada* e do *diferencial* dum produto, o que é muito importante do ponto de vista pedagógico.

PROBLEMA INVERSO. Sejam x e y números reais diferentes de zero. Pretende-se resolver o seguinte problema:

Dado um número positivo r *qualquer, achar um número* s *tal que, se tomarmos valores aproximados de* x *e* y *com erros relativos menores que* s, *o erro relativo do produto desses valores seja menor que* r.

Trata-se, pois, de achar um número s tal que

$$|\Delta'x| < s \wedge |\Delta'y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Para isso notemos que, se s for um número positivo qualquer tal que $|\Delta'x| < s$ e $|\Delta'y| < s$, virá da fórmula (1):

$$|\Delta'(xy)| < s + s + s^2 = s(2 + s)$$

Então, para que seja $|\Delta'(xy)| < r$, basta que seja $s(2+s) \leqslant r$ ou, o que é equivalente,

$$(2) \qquad s \leqslant \frac{r}{2+s}$$

Vamos provar que esta condição será verificada se for

$$(3) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2+r}}$$

Com efeito, tem-se $\dfrac{r}{2+r} < r$ e, portanto:

$$s \leqslant \frac{r}{2+r} \Rightarrow s < r \Rightarrow \frac{r}{2+r} < \frac{r}{2+s}$$

Logo (3) implica (2), como queríamos provar.

Teremos assim, em conclusão:

$$(4) \qquad |\Delta' x| < \frac{r}{2+r} \wedge |\Delta' y| < \frac{r}{2+r} \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Quando $r < 1$ (como sucede normalmente), a fórmula (3) pode ser substituída por esta outra, mais cómoda para os cálculos:

$$(5) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}}$$

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\pi \times \sqrt{2}$ com erro relativo inferior a 0,001. Então $r = 0{,}001$ e a fórmula (5) dá:

$$s < 0{,}0005 - 0{,}000\,000\,25$$

Como se vê, esta diferença é inferior a 0,0005, mas superior p. ex. a 0,0004. *Portanto, bastará tomar valores aproximados de* π *e de* $\sqrt{2}$ *com erros relativos inferiores a* 0,0004, *para termos a certeza de que o seu produto é valor aproximado de* $\pi\sqrt{2}$ *com erro relativo inferior a* 0,001.

Porém, o número 0,000 000 25 é tão pequeno em relação a 0,000 5, que, *na prática,* pode ser desprezado. Assim, poderíamos tomar simplesmente

$$s < 0{,}000\,5.$$

Dum modo geral, quando r é bastante menor que 1, a fórmula (5) pode ser substituída por

$$s \leqslant \frac{r}{2}$$

Isto não garante, *em absoluto,* que, sendo $|\Delta'x| < s$ e $|\Delta'y| < s$, se tenha $|\Delta'(xy)| < r$; mas, se for $|\Delta'(xy)| \geqslant r$, a diferença será então *insignificante para fins práticos.*

2. O estudo feito no número anterior permite-nos afirmar o seguinte:

(6) $\forall r > 0,\ \exists\, s > 0\colon\ |\Delta'x| < s \wedge |\Delta'y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$

Basta atender, p. ex., a (4) para ver que isto é verdade.

Ora, a proposição (6) pode ser estendida ao caso dos erros absolutos; isto é, podemos provar que:

$$\forall \delta > 0, \ \exists \ \varepsilon > 0: \ |\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta(xy)| < \delta$$

Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais quaisquer. Então, dado arbitrariamente um número positivo* δ, *é sempre possível achar um número positivo* ε, *tal que, se* x_1 *e* y_1 *forem valores aproximados de* x *e de* y *a menos de* ε, *o produto* $x_1 y_1$ *é, com certeza, valor aproximado de* xy *a menos de* δ.

Demonstração:

Basta considerar o caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, visto que, caso contrário, o teorema é evidente. Sejam, pois, x e y dois números reais não nulos. Suponhamos que queremos achar valores aproximados x_1 e y_1 de x e y, de modo que o erro absoluto $|x_1 y_1 - xy|$ seja inferior a um dado número δ. Pretende-se, pois, que seja

$$(7) \qquad |\Delta(xy)| < \delta$$

Ora, pela definição de desvio relativo, tem-se:

$$\Delta'(xy) = \frac{\Delta(xy)}{xy}$$

Logo, a condição (7) é *equivalente* a esta outra:

$$(7') \qquad |\Delta'(xy)| < \frac{\delta}{|xy|}$$

Ponhamos $\dfrac{\delta}{|xy|} = r$. Ora, segundo (6), existe pelo menos um número $s > 0$ tal que

$$(8) \qquad |\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta'(xy)| < r$$

Mas, aplicando novamente a definição de desvio relativo, vê-se que as condições

$$|\Delta' x| < s \quad , \quad |\Delta' y| < s$$

equivalem, respectivamente, às condições

$$|\Delta x| < |x| \, . \, s \quad , \quad |\Delta y| < |y| \, . \, s$$

Portanto, se designarmos por ε o menor dos números positivos $|x|s$ e $|y|s$, deduzimos de (8):

$$|\Delta x| < \varepsilon \wedge |\Delta y| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta(xy)| < \delta,$$

Em conclusão: qualquer que seja $\delta > 0$, existe pelo menos um $\varepsilon > 0$, tal que

$$|x_1 - x| < \varepsilon \wedge |y_1 - y| < \varepsilon \Rightarrow |x_1 y_1 - xy| < \delta$$

q. e. d.

Este teorema tem muito interesse pelas suas aplicações à teoria dos limites e da continuidade. Convém, por isso, que a sua demonstração seja bem estudada.

3. Passemos, agora, ao caso do quociente. Sejam ainda x_1 e y_1 valores aproximados de dois números reais x e y, sendo $y \neq 0$ e $y_1 \neq 0$. Temos então, pondo $x_1 - x = \Delta x$ e $y_1 - y = \Delta y$:

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y}$$

$$= \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{(y + \Delta y)\,y}$$

ou seja:

$$\boxed{\Delta \frac{x}{y} = \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{(y + \Delta y)\,y}} \qquad (9)$$

Esta é a FÓRMULA DO DESVIO DO QUOCIENTE. Quando $|\Delta y|$ é bastante pequeno em relação a y, pode usar-se na prática a *fórmula aproximada:*

$$\Delta \frac{x}{y} \approx \frac{y\,\Delta x - x\,\Delta y}{y^2}$$

Posto isto, procuremos uma *fórmula do desvio relativo do quociente* (supondo também $x \neq 0$). De (9) deduz-se, notando que $\Delta x = x \cdot \Delta' x$ e $y = y \cdot \Delta' y$:

$$\Delta \frac{x}{y} = \frac{xy \cdot \Delta' x - xy \cdot \Delta' y}{(y + y\Delta' y)\,y} = \frac{x\Delta' x - x\Delta' y}{y + y\,\Delta' y}$$

donde, dividindo o 1.º membro e o último por x/y:

$$(10) \qquad \boxed{\Delta' \frac{x}{y} = \frac{\Delta' x - \Delta' y}{1 + \Delta' y}}$$

Eis, portanto, a FÓRMULA EXACTA DO DESVIO DO QUOCIENTE. Supondo, agora, $|\Delta' y| < 1$ (é este o caso que interessa normalmente), tem-se:

$$|1 + \Delta' y| \geqslant 1 - |\Delta' y| > 0$$

e de (9) deduz-se então:

$$(11) \qquad |\Delta' \frac{x}{y}| \leqslant \frac{|\Delta' x| + |\Delta' y|}{1 - |\Delta' y|}$$

que é uma FÓRMULA DE MAJORAÇÃO DO DESVIO RELATIVO DO QUOCIENTE (com $|\Delta' y| < 1$), que vamos aplicar.

PROBLEMA DIRECTO. Sejam, por exemplo, 3,26 e 0,425 valores aproximados de dois números x e *y*, com erros relativos inferiores, respectivamente, a 3% e a 2%. Então $|\Delta' x| = 0{,}03$ e $|\Delta' y| = 0{,}02$, donde, aplicando (11):

$$|\Delta' \frac{x}{y}| < \frac{0{,}05}{0{,}98} < 0{,}0511$$

Na prática, pode tomar-se

$$|\Delta' \frac{x}{y}| \lesssim 0{,}05$$

e, dum modo geral,

$$|\Delta' \frac{x}{y}| \lesssim |\Delta' x| + |\Delta' y|,$$

exactamente como no caso do produto.

PROBLEMA INVERSO. Sejam x e y números reais quaisquer. Trata-se, agora, do seguinte problema:

Dado um número positivo r, *achar um número positivo* s, *tal que*

$$|\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Para isso, notemos que, sendo *s* um número *positivo qualquer menor que* 1, tal que $|\Delta' x| < s$ e $|\Delta' y| < s$, virá de (11):

$$|\Delta' \frac{x}{y}| < \frac{2s}{1-s}$$

Então, para que o 1.º membro seja menor que r, basta que se tenha

$$\frac{2s}{1-s} \leqslant r,$$

o que, sendo $s < 1$, é equivalente a

$$(11) \qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2+r}}$$

Assim, em conclusão:

$$(12)\qquad |\Delta' x| < \frac{r}{2+r} \wedge |\Delta' y| < \frac{r}{2+r} \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Quando $r < 1$, podemos usar, como no caso do produto, a seguinte fórmula em vez de (11):

$$(13)\qquad \boxed{s \leqslant \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}}$$

EXEMPLO. Suponhamos que se trata de calcular $\pi/\sqrt{2}$ com erro relativo inferior a 0,001. Neste caso tem-se, como no exemplo anterior, $r = 0{,}001$. Usando a fórmula (13), idêntica à fórmula (5) usada para o produto, a conclusão será perfeitamente análoga à do referido exemplo.

NOTA. Observe-se que, nos problemas respeitantes a erros relativos de produtos e quocientes, não chegam a intervir os números x, y nem os respectivos valores aproximados x_1, y_1. O mesmo já não acontece quando se trata de erros absolutos.

4. A conclusão (12) permite-nos afirmar que, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$(14)\qquad \forall r > 0 \;,\; \exists s > 0: \; |\Delta' x| < s \wedge |\Delta' y| < s \Rightarrow |\Delta' \frac{x}{y}| < r$$

Esta proposição pode estender-se ao caso dos erros absolutos:

TEOREMA. *Sejam* x *e* y *dois números reais quaisquer, sendo* $y \neq 0$. *Então, dado arbitrariamente um número positivo* δ, *é sempre* *possível achar um número positivo* ε, *de tal modo que, se* x_1 *e* y_1 *são, respectivamente, valores aproximados de* x *e* y *a menos de* ε *(sendo* $y_1 \neq 0$*), o quociente* x_1/y_1 *é, com certeza, valor aproximado de* x/y *a menos de* δ*; isto é, em símbolos:*

$$|x - x_1| < \varepsilon \wedge |y - y_1| < \varepsilon \wedge y_1 \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{x_1}{y_1} - \frac{x}{y} \right| < \delta$$

A demonstração é perfeitamente análoga à que se deu para o caso do produto e pode ser feita como exercício pelo próprio aluno. O teorema tem grande interesse teórico, pelas suas aplicações à teoria dos limites e da continuidade.

5. Posto isto, pode-se passar ao estudo, feito no n.º 5 do ADITAMENTO I, sobre cálculo de expressões numéricas com multiplicações e divisões. Finalmente, será tratado, de maneira breve, o caso das potências e das raízes (TEXTO-PILOTO e ADITAMENTO I). Convém aproveitar a oportunidade para levar o aluno a aperfeiçoar a sua técnica de cálculo, quer numérico, quer algébrico.

NOTA FINAL

A falta de tempo impede-nos de apresentar aqui um último capítulo, que seria intitulado 'Grandezas e números reais' e que incluiria, em especial, um estudo rigoroso das funções exponencial e logarítmica. No entanto, propomo-nos dizer ainda alguma coisa sobre o assunto na parte final do *Guia*.

Índice

Composto e impresso na
Tipografia Guerra — Viseu
e concluiu-se
em Março de 1976

GABINETE DE ESTUDOS E PLANEAMENTO
DO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA